О. ФОРСТЕР

# Римановы поверхности

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР" МОСКВА




ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

HEIDELBERGER TASCHENBÜCHER BAND 184

Otto Forster

# RIEMANNSCHE FLÄCHEN

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1977

О. ФОРСТЕР

# Римановы поверхности

Перевод с немецкого

Е. М. Чирки

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1980

УДК 517.1

Книга написана известным специалистом по геометрической теории функций и дает сжатое и вместе с тем вполне доступное изложение теории римановых поверхностей. Она написана на современном уровне и восполняет пробел в математической литературе по этому важному разделу анализа.

Книга представляет интерес для математиков различных специальностей, а также для преподавателей, аспирантов и студентов университетов.

*Редакция литературы по математическим наукам*

1702040000

Ф $\frac{20203\text{-}011}{041\,(01)\text{-}80}$ 11-80



**О. Форстер**

**РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ**

Ст. науч. редактор Н. И. Плужникова. Мл. науч. редактор Ю. С. Андреева. Художник А. В. Шипов. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор Н. А. Иовлева. Корректор В. И. Киселева

ИБ № 1807

Сдано в набор 17.05.79. Подписано к печати 20.08.79. Формат 60Х90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 7,75 бум. л. Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 12,16. Изд. № 1/0173. Тираж 8800 экз. Зак. 442. Цена 95 к.

Издательство «МИР», 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Набрано и сматрицировано в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28. Отпечатано в ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

# Предисловие

Эта книга возникла на основе курсов лекций по римановым поверхностям, которые автор читал в университетах Мюнхена, Регенсбурга и Мюнстера. Ее цель — дать введение в эту многогранную и красивую область анализа, а также изложить методы теории комплексных многообразий в частном случае комплексной размерности 1, где они особенно просты и прозрачны.

Книга делится на три главы. В первой главе мы рассматриваем римановы поверхности с точки зрения теории накрытий и в краткой форме развиваем необходимые для этого топологические понятия. Затем строятся римановы поверхности, которые получаются при аналитическом продолжении ростков функций, и, в частности, римановы поверхности алгебраических функций. Более подробно мы занимаемся аналитическими функциями со специальным характером многозначностей, например первообразными голоморфных дифференциальных форм и решениями линейных дифференциальных уравнений.

Вторая глава посвящена теории компактных римановых поверхностей. Излагаются основные классические результаты, такие, как теорема Римана — Роха, теорема Абеля и проблема обращения Якоби. Важнейшим техническим средством здесь является теория когомологий со значениями в пучках. При этом мы ограничиваемся одномерными когомологиями, которые допускают сравнительно простое описание. Все основные теоремы получаются (согласно Серру) из конечномерности первой группы когомологий со значениями в пучке голоморфных функций. Доказательство этого предложения в свою очередь основывается на локальной разрешимости неоднородных уравнений Коши — Римана и лемме Шварца.

В третьей главе доказываются теорема Римана об отображениях для односвязных римановых поверхностей, а также основные теоремы Бенке — Штейна для некомпактных римановых поверхностей (аппроксимационная теорема Рунге, теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса). При этом для решения задачи Дирихле мы применяем метод Перрона, а для

доказательства аппроксимационной теоремы Рунге при помощи леммы Вейля — метод Мальгранжа. Кроме того, в дополнении к гл. I мы приводим теорему Штейна о существовании голоморфных функций с заданными автоморфными слагаемыми, а также решение Рёрля проблемы Римана — Гильберта на некомпактных римановых поверхностях.

Мы старались по возможности уменьшить объем необходимых предварительных сведений и развивать нужный аппарат в самой книге. Все же ожидается, что читатель владеет основами теории функций одного переменного, общей топологии и алгебры. Кроме того, в гл. II и III используются некоторые факты из дифференциальной топологии и функционального анализа; они собраны в приложении. Теория интегрирования Лебега нам не понадобится: мы будем интегрировать только голоморфные или дифференцируемые функции и формы. Мы стремились также не употреблять без доказательства результаты по топологии поверхностей.

Объем излагаемого материала соответствует примерно трем односеместровым курсам лекций. Заметим, что в гл. II и III предполагается знакомство лишь с частью предыдущей главы. Так, ознакомившись с § 1, 6 и 9 (определения римановых поверхностей, пучков и дифференциальных форм), можно сразу перейти к гл. II. В свою очередь из нее нужны только § 12—14, чтобы затем в гл. III можно было изучать основные теоремы теории некомпактных римановых поверхностей.

Я благодарю за поддержку моих коллег: Г. Крауса, который обработал лекции по компактным римановым поверхностям, читанные мною в Мюнхене в 1968 г., и К. Кнорра и Д. Ляйстнера, помогавших при чтении корректур; кроме того, Д. Ляйстнер составил указатель.

*О. Форстер*

# Глава 1
# НАКРЫТИЯ

Теория римановых поверхностей обязана своим происхождением тому простому факту, что при аналитическом продолжении голоморфных функций вдоль различных путей могут получаться различные значения функций. Поэтому если росток голоморфных функций неограниченно аналитически продолжать, то, вообще говоря, получится многозначная функция. А чтобы опять получилась однозначная функция, область определения заменяют лежащей над комплексной плоскостью многолистной поверхностью, которая над каждой точкой основания имеет столько точек, сколько оказывается различных функциональных ростков у продолженной функции. Тогда на этой «накрывающей поверхности» аналитическая функция будет однозначной. Абстрагируясь от того факта, что эта поверхность простирается над комплексной плоскостью (или числовой сферой), мы получаем общее понятие римановой поверхности как области определения аналитических функций одного переменного.

В этой главе мы обсуждаем прежде всего общее понятие римановой поверхности и затем понятие накрытия с топологической и аналитической точек зрения. Теория накрытий потом применяется к проблеме аналитического продолжения, к построению римановых поверхностей алгебраических функций, интегрированию дифференциальных форм и к решению линейных дифференциальных уравнений.

## § 1. Определение римановых поверхностей

В этом параграфе мы определяем римановы поверхности, понятия голоморфных и мероморфных функций на них, а также голоморфные отображения между римановыми поверхностями.

Римановы поверхности — это двумерные многообразия с дополнительной структурой, которую еще предстоит определить. Как известно, $n$-мерным многообразием называется хаусдорфово пространство $X$, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$.

**1.1. Определение.** Пусть $X$ — двумерное многообразие. *Комплексная карта* на $X$ есть гомеоморфизм $\varphi$: $U \longrightarrow V$ некоторого открытого подмножества $U \subset X$ на открытое подмножество $V \subset \mathbb{C}$. Две комплексные карты $\varphi_i$: $U_i \longrightarrow V_i$, $i=1, 2$, называются *биголоморфно согласованными*, если отображение

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon\ \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

биголоморфно (рис. 1). *Комплексным атласом* на $X$ называется система $\mathfrak{A} = \{\varphi_i\colon\ U_i \longrightarrow V_i,\ i \in I\}$ попарно биголоморфно согласованных карт, покрывающих $X$, т. е. $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$. Комплексные атласы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ на $X$ называются *биголоморфно согласованными*, если каждая карта из $\mathfrak{A}$ биголоморфно согласована с каждой картой из $\mathfrak{A}'$.

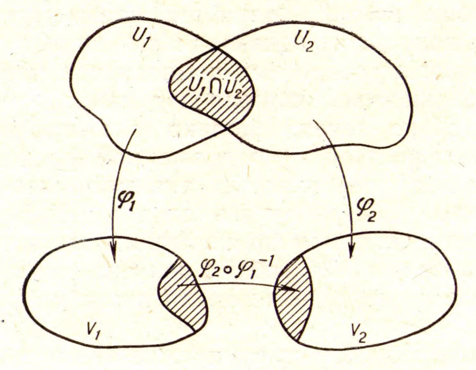



Рис. 1.

**1.2. Замечания.** (a) Если $\varphi$: $U \longrightarrow V$ — комплексная карта, $U_1$ открыто в $U$ и $V_1 := \varphi(U_1)$, то $\varphi$: $U_1 \longrightarrow V_1$ — тоже карта, биголоморфно согласованная с $\varphi$: $U \longrightarrow V$.

(b) Учитывая тот факт, что композиция биголоморфных отображений тоже биголоморфна, легко проверить, что биголоморфная согласованность между комплексными атласами является отношением эквивалентности.

**1.3. Определение.** *Комплексной структурой* на двумерном многообразии $X$ называется класс эквивалентности биголоморфно согласованных атласов на $X$.

Таким образом, комплексную структуру на $X$ можно определять, задавая один комплексный атлас. Всякая комплексная структура $\Sigma$ на $X$ обладает однозначно определенным максимальным атласом $\mathfrak{A}^*$: если $\mathfrak{A}$ — какой-нибудь атлас из $\Sigma$,

то $\mathfrak{A}^*$ состоит из всех комплексных карт на $X$, биголоморфно согласованных с каждой картой из $\mathfrak{A}$.

**1.4. Определение.** *Риманова поверхность* есть пара $(X, \Sigma)$, состоящая из связного двумерного многообразия $X$ и комплексной структуры $\Sigma$ на $X$.

Чаще всего пишут только $X$ вместо $(X, \Sigma)$, когда ясно, какая комплексная структура имеется в виду. Иногда пишут также $(X, \mathfrak{A})$, когда атлас $\mathfrak{A}$ является представителем $\Sigma$.

*Соглашение.* Если $X$ — риманова поверхность, то под картой на $X$ всегда понимается некоторая комплексная карта из максимального атласа комплексной структуры на $X$.

*Замечание.* Локально риманова поверхность $X$ есть не что иное, как открытое множество в комплексной плоскости; при помощи карты $\varphi$: $U \to V \subset \mathbb{C}$ открытое множество $U \subset X$ биективно накрывает $V$. Однако заданная в $X$ точка принадлежит многим картам, и ни одна из них не является предпочтительной. Поэтому из теории функций в комплексной плоскости на римановы поверхности можно перенести только те понятия, которые инвариантны относительно биголоморфных отображений, т. е. для которых не надо потом указывать, какая специальная карта выбирается.

**1.5. Примеры римановых поверхностей.**

(a) *Гауссова числовая плоскость* $\mathbb{C}$. Ее комплексная структура определяется атласом, единственной картой которого является тождественное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) *Область.* Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y \subset X$ — некоторая область (т. е. открытое связное подмножество). Тогда $Y$ естественным образом тоже становится римановой поверхностью, если комплексную структуру определить при помощи атласа, состоящего из всех комплексных карт $\varphi$: $U \to V$ на $X$, для которых $U \subset Y$.

В частности, любая область $Y \subset \mathbb{C}$ является римановой поверхностью.

(c) *Риманова числовая сфера* $\mathbb{P}_1$. Положим $\mathbb{P}_1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где $\infty$ есть символ, не принадлежащий $\mathbb{C}$. Введем в $\mathbb{P}_1$ следующую топологию: пусть открытыми множествами будут обычные открытые множества $U \subset \mathbb{C}$, а кроме того, множества вида $V \cup \{\infty\}$, где $V \subset \mathbb{C}$ есть дополнение к некоторому компакту $K \subset \mathbb{C}$. Благодаря этому $\mathbb{P}_1$ превращается в компактное хаусдорфово пространство (которое гомеоморфно двумерной сфере $S_2$). Мы полагаем

$$U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\} = \mathbb{C},$$
$$U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}.$$

Пусть отображения $\varphi_i$: $U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i=1, 2$, определяются следующим образом: $\varphi_1$ есть тождественное отображение, а

$$\varphi_2(z) := \begin{cases} 1/z & \text{для} \quad z \in \mathbb{C}^*, \\ 0 & \text{для} \quad z = \infty; \end{cases}$$

тогда $\varphi_i$: $U_i \longrightarrow \mathbb{C}$ — гомеоморфизмы. Это показывает, что $\mathbb{P}_1$ является двумерным многообразием. Так как $U_1$ и $U_2$ связны и имеют непустое пересечение, то $\mathbb{P}_1$ тоже связно.

Комплексная структура на $\mathbb{P}_1$ определяется теперь при помощи атласа, состоящего из карт $\varphi_i$: $U_i \longrightarrow \mathbb{C}$, $i=1, 2$. Для этого нам надо еще проверить, что карты биголоморфно согласованы. Но $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^*$ и

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \ \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto 1/z,$$

— биголоморфное отображение.

*Замечание.* Обозначение $\mathbb{P}_1$ взято потому, что $\mathbb{P}_1$ можно понимать как одномерное проективное пространство над полем комплексных чисел.

(d) *Торы.* Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ — комплексные числа, линейно независимые над $\mathbb{R}$, и

$$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{n\omega_1 + m\omega_2: \ n, \ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Множество $\Gamma$ называют решеткой, натянутой на $\omega_1$ и $\omega_2$ (рис. 2). Два комплексных числа $z$, $z' \in \mathbb{C}$ называются эквивалентными

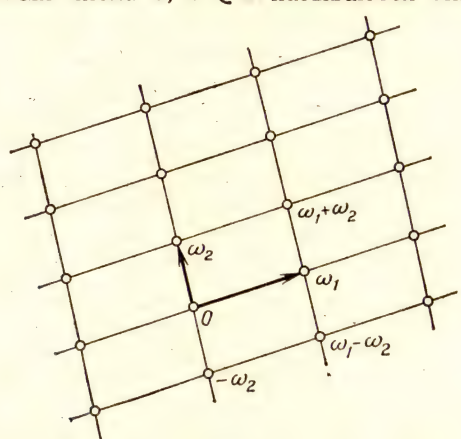



Рис. 2.

$\operatorname{mod} \Gamma$, если $z - z' \in \Gamma$. Множество всех классов эквивалентности обозначается $\mathbb{C}/\Gamma$. Пусть $\pi$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ есть каноническая проекция, которая каждой точке $z \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие ее класс эквивалентности $\operatorname{mod} \Gamma$.

Введем в $\mathbb{C}/\Gamma$ следующую топологию (фактортопологию): подмножество $U\subset\mathbb{C}/\Gamma$ называется открытым тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(U)\subset\mathbb{C}$ открыто. Таким образом, $\mathbb{C}/\Gamma$ становится хаусдорфовым пространством и факторотображение $\pi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}/\Gamma$ непрерывно. Так как $\mathbb{C}$ связно, то $\mathbb{C}/\Gamma$ тоже связно. Более того, $\mathbb{C}/\Gamma$ — компакт, так как оно является образом относительно $\pi$ компактного параллелограмма

$$P:=\{\lambda\omega_1+\mu\omega_2\colon\ \lambda,\ \mu\in[0,\ 1]\}.$$

Отображение $\pi$ открыто, т. е. образ каждого открытого множества $V\subset\mathbb{C}$ открыт. Для этого надо только показать, что $\hat{V}:=\pi^{-1}(\pi(V))$ открыто. Но

$$\hat{V}=\bigcup_{\omega\in\Gamma}(\omega+V),$$

каждое множество $\omega+V$ открыто, а значит, и $\hat{V}$ тоже.

Теперь введем на $\mathbb{C}/\Gamma$ комплексную структуру следующим образом. Пусть $V\subset\mathbb{C}$ — открытое множество, не содержащее ни одной пары различных точек, эквивалентных $\operatorname{mod}\Gamma$. Тогда $U:=\pi(V)$ открыто и $\pi\colon V\to U$ — гомеоморфизм. Обратное к нему отображение $\varphi\colon U\to V$ задает комплексную карту на $\mathbb{C}/\Gamma$. Пусть $\mathfrak{A}$ есть множество всех карт, которые можно получить таким образом. Мы покажем теперь, что любые две карты $\varphi_i\colon U_i\to V_i$, $i=1,\ 2$, из $\mathfrak{A}$ биголоморфно согласованы. Рассмотрим отображение

$$\psi:=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\colon\ \varphi_1(U_1\cap U_2)\to\varphi_2(U_1\cap U_2).$$

Для каждой $z\in\varphi_1(U_1\cap U_2)$ имеем $\pi(\psi(z))=\varphi_1^{-1}(z)=\pi(z)$ и, значит, $\psi(z)-z\in\Gamma$. Так как $\Gamma$ дискретно, а $\psi$ непрерывно, то отсюда следует, что функция $\psi(z)-z$ постоянна на каждой связной компоненте множества $\varphi_1(U_1\cap U_2)$. Таким образом, $\psi$, а также $\psi^{-1}$ — голоморфные отображения. Тем самым в $\mathbb{C}/\Gamma$ вводится комплексная структура, которая определяется атласом $\mathfrak{A}$.

*Замечание*. Пусть $S_1=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$ есть одномерная сфера (окружность). Сопоставляя каждой точке из $\mathbb{C}/\Gamma$ с представителем $\lambda\omega_1+\mu\omega_2$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R})$ точку

$$(e^{2\pi i\lambda},\ e^{2\pi i\mu})\in S_1\times S_1,$$

мы получаем гомеоморфизм $\mathbb{C}/\Gamma$ на тор $S_1\times S_1$.

**1.6. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y\subset X$ — ее открытое подмножество. Функция $f\colon Y\to\mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если для каждой карты $\varphi\colon U\to V$ на $X$ функция

$$f\circ\varphi^{-1}\colon\ \varphi(U\cap Y)\to\mathbb{C}$$

в обычном смысле голоморфна на открытом множестве $\varphi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$. Множество всех голоморфных на $Y$ функций обозначается символом $\mathcal{O}(Y)$.

**1.7. Замечания.** (a) Сумма и произведение голоморфных функций — тоже голоморфные функции, так же как и постоянные функции. Таким образом, $\mathcal{O}(Y)$ является $\mathbb{C}$-алгеброй.

(b) Условие, сформулированное в определении, надо проверять, конечно, не для всех карт из максимального атласа на $X$, а только для некоторого семейства карт, покрывающего $Y$. Тогда оно будет автоматически выполняться для всех остальных карт.

(c) Если $\varphi$: $U \longrightarrow V$ — карта на $X$, то $\varphi$ является комплекснозначной функцией на $U$. Она, очевидно, голоморфна. Функция $\varphi$ называется локальной координатой, а $(U, \varphi)$ — *координатной окрестностью* каждой точки $a \in U$. В связи с этим вместо $\varphi$ часто употребляют букву $z$.

**1.8. Предложение** (теорема Римана об устранимой особенности). *Пусть $U$ — открытое подмножество некоторой римановой поверхности и $a \in U$. Пусть функция $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ ограничена в проколотой окрестности точки $a$. Тогда $f$ однозначно продолжается до функции $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$.*

Это следует непосредственно из теоремы Римана об устранимой особенности в комплексной плоскости.

Перейдем теперь к определению голоморфных отображений между римановыми поверхностями.

**1.9. Определение.** Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности. Непрерывное отображение $f$: $X \longrightarrow Y$ называется *голоморфным*, если для каждой пары карт $\varphi_1$: $U_1 \longrightarrow V_1$ на $X$ и $\varphi_2$: $U_2 \longrightarrow V_2$ на $Y$, таких, что $f(U_1) \subset U_2$, отображение

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}\colon\ V_1 \longrightarrow V_2$$

голоморфно в обычном смысле.

Отображение $f$: $X \longrightarrow Y$ называется *биголоморфным*, когда оно биективно и как $f$: $X \longrightarrow Y$, так и $f^{-1}$: $Y \longrightarrow X$ голоморфны. Две римановы поверхности $X$, $Y$ называются *изоморфными*, если существует биголоморфное отображение $f$: $X \longrightarrow Y$.

**1.10. Замечания.** (a) В частном случае $Y = \mathbb{C}$ голоморфные отображения $f$: $X \longrightarrow \mathbb{C}$ — это, очевидно, то же самое, что голоморфные функции.

(b) Если $X$, $Y$, $Z$ — римановы поверхности и $f$: $X \longrightarrow Y$, $g$: $Y \longrightarrow Z$ — голоморфные отображения, то их композиция $g \circ f$: $X \longrightarrow Z$ тоже голоморфна.

(c) Непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$ между двумя римановыми поверхностями голоморфно тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества $V \subset Y$ и всякой голоморфной функции $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ «поднятая» функция $\varphi \circ f: f^{-1}(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ принадлежит $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$. Это следует прямо из определений и замечаний (1.7c) и (1.10b).

Таким образом, голоморфное отображение $f: X \longrightarrow Y$ индуцирует отображение

$$f^*: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(f^{-1}(V)), \quad f^*(\varphi) = \varphi \circ f.$$

Легко проверить, что $f^*$ является гомоморфизмом колец. Если $g: Y \longrightarrow Z$ — другое голоморфное отображение, $W$ открыто в $Z$, $V := g^{-1}(W)$ и $U := f^{-1}(V)$, то $(g \circ f)^*: \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$ является композицией отображений $g^*: \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$ и $f^*: \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$, т. е. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

**1.11. Предложение** (теорема единственности). *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $f_1$, $f_2$: $X \longrightarrow Y$ — голоморфные отображения, которые совпадают на некотором подмножестве $A \subset X$, обладающем предельной точкой $a \in X$. Тогда $f_1$ и $f_2$ совпадают тождественно.*

*Доказательство*. Пусть $G$ есть множество всех точек $x \in X$, обладающих окрестностью $W$, такой, что $f_1 | W = f_2 | W$. По определению, $G$ открыто. Покажем, что $G$ также и замкнуто. В самом деле, пусть точка $b$ принадлежит границе $G$. Из непрерывности $f_1$ и $f_2$ следует, что $f_1(b) = f_2(b)$. Поэтому имеются карты $\varphi: U \longrightarrow V$ на $X$ и $\psi: U' \longrightarrow V'$ на $Y$, такие, что $b \in U$ и $f_i(U) \subset U'$. Кроме того, мы можем считать, что $U$ связно. Отображения

$$g_i := \psi \circ f_i \circ \varphi^{-1}: V \longrightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

голоморфны. Так как $U \cap G \neq \varnothing$, то $g_1$ и $g_2$ совпадают по теореме единственности для голоморфных функций в областях комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому $f_1 | U = f_2 | U$. Отсюда следует, что $b \in G$ и, значит, множество $G$ замкнуто. Так как $X$ связно, то либо $G = \varnothing$, либо $G = X$. Но первый случай не подходит, так как (снова по теореме единственности на плоскости) $a \in G$. Таким образом, $f_1$ и $f_2$ совпадают на всей поверхности $X$.

**1.12. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y$ — открытое подмножество $X$. *Мероморфной функцией* на $Y$ называется голоморфная функция $f: Y' \longrightarrow \mathbb{C}$, определенная на открытом подмножестве $Y' \subset Y$ со следующими свойствами:

(i) $Y \setminus Y'$ состоит только из изолированных точек;

(ii) для каждой точки $p \in Y \setminus Y'$ имеем

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty.$$

Точки множества $Y \setminus Y'$ называются *полюсами* функции $f$. Множество всех мероморфных на $Y$ функций обозначается символом $\mathcal{M}(Y)$.

**1.13. Замечания.** (a) Пусть $(U, z)$ есть координатная окрестность полюса $p$ функции $f$ с $z(p) = 0$. Тогда в некоторой окрестности $p$ функцию $f$ можно разложить в ряд Лорана

$$f = \sum_{\nu = -k}^{\infty} c_\nu z^\nu.$$

(b) Множество $\mathcal{M}(Y)$ естественным образом становится $\mathbb{C}$-алгеброй. Сумма (соотв. произведение) двух мероморфных функций $f, g \in \mathcal{M}(Y)$ определена прежде всего как голоморфная функция там, где $f$ и $g$ вместе голоморфны; далее, по теореме Римана об устранимой особенности, $f+g$ (соотв. $fg$) продолжается на возможные устранимые особенности.

**1.14. Пример.** Пусть $n \geqslant 1$ и

$$F(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

— многочлен. Тогда $F$ определяет голоморфное отображение $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Рассматривая $\mathbb{C}$ как подмножество $\mathbb{P}_1$, мы имеем $\lim\limits_{z \to \infty} |F(z)| = \infty$. Таким образом, $F \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$.

А теперь рассмотрим интерпретацию мероморфных функций как отображений в риманову сферу.

**1.15. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $f \in \mathcal{M}(X)$. Для каждого полюса $p$ функции $f$ положим по определению $f(p) := \infty$. Тогда получается голоморфное отображение $f\colon X \to \mathbb{P}_1$. Обратно, если $f\colon X \to \mathbb{P}_1$ — голоморфное отображение, то либо $f$ — константа, равная $\infty$, либо $f^{-1}(\infty)$ состоит только из изолированных точек и тогда $f\colon X \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ есть мероморфная функция на $X$.*

В дальнейшем мы будем отождествлять мероморфную функцию $f \in \mathcal{M}(X)$ и соответствующее ей голоморфное отображение $f\colon X \to \mathbb{P}_1$.

*Доказательство.* (a) Пусть $f \in \mathcal{M}(X)$ и $P$ — множество полюсов $f$. Определяемое $f$ отображение, во всяком случае, непрерывно. Пусть $\varphi\colon U \to V$ и $\psi\colon U' \to V'$ — карты на $X$ и $\mathbb{P}_1$ соответственно, такие, что $f(U) \subset U'$. Нам надо показать, что отображение

$$g := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to V'$$

голоморфно. Так как $f$ голоморфна на $X \setminus P$, то $g$ голоморфна на $V \setminus \varphi(P)$. По теореме Римана об устранимой особенности $g$ голоморфна на всем $V$.

(b) Обратное следует из теоремы единственности 1.11.

**1.16. Замечание.** Из (1.11) и (1.15) следует, что теорема единственности справедлива также для мероморфных функций на римановой поверхности $X$. Поэтому функция $f \in \mathcal{M}(X)$, отличная от тождественного нуля, имеет только изолированные нули. Из этого следует, что $\mathcal{M}(X)$ есть поле.

## § 2. Элементарные свойства голоморфных отображений

В этом параграфе мы доказываем несколько элементарных топологических свойств голоморфных отображений римановых поверхностей и показываем, как из них выводятся известные теоремы теории функций на плоскости, такие, как теорема Лиувилля и основная теорема алгебры.

**2.1. Предложение** (локальная форма голоморфных отображений). *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности, $f\colon X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение, $a \in X$ и $b := f(a)$. Тогда найдется натуральное число $k \geqslant 1$ и карты $\varphi\colon U \to V$ на $X$ и $\psi\colon U' \to V'$ на $Y$ со следующими свойствами:*

(i) $a \in U$, $\varphi(a) = 0$; $b \in U'$, $\psi(b) = 0$;

(ii) $f(U) \subset U'$;

(iii) *отображение* $F := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon V \to V'$ *имеет вид*

$$F(z) = z^k \quad \text{для всех} \quad z \in V.$$

*Доказательство.* Прежде всего можно найти карты $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ на $X$ и $\psi\colon U' \to V'$ на $Y$, такие, что свойства (i) и (ii) выполняются с $(U_1, \varphi_1)$ вместо $(U, \varphi)$. По теореме единственности, функция

$$f_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}\colon V_1 \to V' \subset \mathbb{C}$$

отлична от константы и $f_1(0) = 0$. Таким образом, существует $k \geqslant 1$, такое, что $f_1(z) = z^k g(z)$, где $g$ — голоморфная в $V_1$ функция с $g(0) \neq 0$. Поэтому в некоторой окрестности точки 0 существует голоморфная функция $h$, такая, что $h^k = g$. Соответствие $z \mapsto zh(z)$ осуществляет биголоморфное отображение $\alpha\colon V_2 \to V$ некоторой открытой окрестности нуля $V_2 \subset V_1$ на открытую окрестность нуля $V$. Пусть $U := \varphi_1^{-1}(V_2)$. Заменим теперь карту $\varphi_1\colon U_1 \to V_1$ на $\varphi\colon U \to V$, где $\varphi = \alpha \circ \varphi_1$. Тогда по построению отображение $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ имеет вид $F(z) = z^k$, ч. т. д.

**2.2. Замечание.** Число $k$ в предложении 2.1 можно охарактеризовать следующим образом: для всякой окрестности $U_0 \ni a$ найдутся окрестности $U \subset U_0$ точки $a$ и $W$ точки $b = f(a)$, такие, что для каждой точки $y \in W$, $y \neq b$, множество $f^{-1}(y) \cap U$ состоит ровно из $k$ элементов. Число $k$ называется *кратностью*, с которой отображение $f$ принимает значение $b$ в точке $a$.

**2.3. Пример.** Пусть $f(z) = z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k$ — многочлен степени $k$. Тогда $f$ можно рассматривать как голоморфное отображение $f: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ с $f(\infty) = \infty$ (см. § 1). Используя карты в $\infty$, легко посчитать, что $\infty$ принимается с кратностью $k$.

**2.4. Следствие.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $f$: $X \longrightarrow Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Тогда $f$ — открытое отображение, т. е. образ всякого открытого множества открыт.*

*Доказательство.* Из предложения 2.1 непосредственно следует, что если $U$ — окрестность точки $a \in X$, то $f(U)$ — окрестность точки $f(a)$. Из этого следует открытость.

**2.5. Следствие.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $f$: $X \longrightarrow Y$ — инъективное голоморфное отображение. Тогда $f$ осуществляет биголоморфное отображение $X$ на $f(X)$.*

*Доказательство.* Так как $f$ инъективно, то число $k$, о котором говорится в предложении 2.1, всюду равно единице. Отсюда следует, что обратное отображение $f^{-1}$: $f(X) \longrightarrow X$ голоморфно.

**2.6. Следствие** (принцип максимума). *Пусть $X$ — риманова поверхность и $f$: $X \longrightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $|f|$ не может принимать в $X$ своего максимального значения.*

*Доказательство.* Предположим, что есть точка $a \in X$, такая, что

$$R := |f(a)| = \sup \{|f(x)|: \ x \in X\}.$$

Тогда

$$f(X) \subset K := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| \leqslant R\}.$$

Так как множество $f(X)$ открыто, то все оно лежит внутри $K$, а это противоречит условию $f(a) \in \partial K$.

**2.7. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности, $X$ компактна и $f$: $X \longrightarrow Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Тогда $Y$ тоже компактна и отображение $f$ сюръективно.*

*Доказательство.* Согласно (2.4), множество $f(X)$ открыто. Так как $X$ компактна, то $f(X)$ компактно и, значит, замкнуто. Так как в связном пространстве единственными одновременно открытыми и замкнутыми множествами являются пустое множество и все пространство, то $f(X)=Y$. Таким образом, $f$ сюръективно и $Y$ компактна.

**2.8. Следствие.** *На компактной римановой поверхности $X$ всякая голоморфная функция $f: X \to \mathbb{C}$ постоянна.*

Это следует из предложения 2.7, так как плоскость $\mathbb{C}$ некомпактна.

**2.9. Следствие.** *Всякая мероморфная функция $f$ на $\mathbb{P}_1$ является рациональной функцией, т. е. отношением двух многочленов.*

*Доказательство.* Функция $f$ имеет лишь конечное число полюсов, так как в противном случае множество полюсов $f$ имело бы предельную точку, и тогда по теореме единственности $f$ должна быть константой, равной $\infty$. Мы можем считать, что в $\infty$ нет полюса $f$ — в противном случае рассмотрим $1/f$ вместо $f$. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ — полюсы $f$ и

$$h_\nu(z)=\sum_{j=-k_\nu}^{-1} c_{\nu j}(z-a_\nu)^j, \quad \nu=1, \ldots, n,$$

— главная часть $f$ в $a_\nu$. Тогда функция $g:=f-(h_1+\ldots+h_n)$ голоморфна на всей $\mathbb{P}_1$ и, значит, согласно следствию 2.8, постоянна. Отсюда следует, что $f$ рациональна.

**2.10. Теорема Лиувилля.** *Всякая ограниченная голоморфная функция $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ постоянна.*

*Доказательство.* По теореме Римана об устранимой особенности (1.8), $f$ можно продолжить до голоморфного отображения $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{C}$, которое постоянно согласно следствию 2.8.

**2.11. Основная теорема алгебры.** *Пусть $n \geqslant 1$ и*

$$f(z)=z^n+c_1 z^{n-1}+\ldots+c_n$$

*— многочлен с коэффициентами $c_\nu \in \mathbb{C}$. Тогда существует по крайней мере одна точка $a \in \mathbb{C}$, такая, что $f(a)=0$.*

*Доказательство.* Многочлен $f$ определяет голоморфное отображение $f: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ с $f(\infty)=\infty$. По предложению 2.7, это отображение сюръективно и, значит, $0 \in f(\mathbb{C})$.

**2.12. Двоякопериодические функции.** Пусть числа $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и $\Gamma:=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$ — натянутая на

них решетка. Мероморфная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ называется *двоякопериодической* относительно Г, если

$$f(z) = f(z+\omega) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{и} \quad \omega \in \Gamma.$$

Для этого достаточно, очевидно, чтобы $f(z) = f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Пусть $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ — каноническое факторотображение. Тогда двоякопериодическая функция $f$ индуцирует функцию $F\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$ с $f = F \circ \pi$. Из определения комплексной структуры в $\mathbb{C}/\Gamma$ непосредственно следует, что $F$ — мероморфная функция на $\mathbb{C}/\Gamma$. Обратно, если дана мероморфная функция $F\colon \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}_1$, то композиция $f = F \circ \pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ является двоякопериодической относительно Г мероморфной функцией. Таким образом, мероморфным функциям на торе $\mathbb{C}/\Gamma$ взаимно однозначно соответствуют двоякопериодические относительно Г мероморфные функции на плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому из предложения 2.7 следует

**2.13. Предложение.** *Всякая двоякопериодическая голоморфная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ постоянна. Всякая непостоянная двоякопериодическая мероморфная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ принимает каждое значение $c \in \mathbb{P}_1$.*

## § 3. Гомотопия кривых. Фундаментальная группа

В этом параграфе мы заготовим несколько вспомогательных утверждений из топологии, связанных с понятием гомотопии кривых.

Под *кривой* в топологическом пространстве $X$ понимается непрерывное отображение $u\colon I \to X$, где $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ — единичный отрезок. Точка $a := u(0)$ называется начальной точкой (началом), а $b := u(1)$ — конечной точкой (концом) этой кривой. В дальнейшем используются также выражения: $u$ есть кривая из $a$ в $b$; кривая $u$ соединяет $a$ и $b$.

Как известно, топологическое пространство $X$ называется *линейно связным*, когда любые две точки $a, b \in X$ можно соединить некоторой кривой. Линейно связное пространство связно, т. е. его нельзя представить в виде $X = U_1 \cup U_2$, где $U_1$, $U_2$ — непустые непересекающиеся открытые подмножества. Топологическое пространство называется *локально линейно связным*, когда любая его точка обладает базисом окрестностей, состоящим из линейно связных множеств. Это, в частности, выполняется в случае многообразий. Связное локально линейно связное пространство $X$ является (глобально) линейно связным, так как легко доказать, что множество всех точек

$x \in X$, которые можно соединить кривой с заданной точкой $a \in X$, одновременно открыто и замкнуто.

**3.1. Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $a, b \in X$. Две кривые $u, v: I \to X$ из $a$ в $b$ называются *гомотопными* (обозначается $u \sim v$), когда существует непрерывное отображение $A: I \times I \to X$ со следующими свойствами:

(i) $A(t, 0) = u(t)$ для всех $t \in I$,

(ii) $A(t, 1) = v(t)$ для всех $t \in I$,

(iii) $A(0, s) = a$ и $A(1, s) = b$ для всех $s \in I$.

*Замечание.* Положим $u_s(t) := A(t, s)$; тогда каждое $u_s$ является кривой из $a$ в $b$ и $u_0 = u$, $u_1 = v$. Говорят, что семейство $(u_s)_{0 \leqslant s \leqslant 1}$ осуществляет деформацию (гомотопию) кривой $u$ в кривую $v$ (рис. 3).

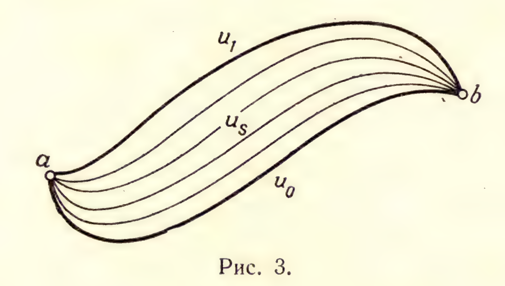



Рис. 3.

**3.2. Предложение.** *Пусть $X$ — топологическое пространство и $a, b \in X$. Гомотопия является отношением эквивалентности на множестве всех кривых из $a$ в $b$.*

*Доказательство.* Рефлексивность и симметрия очевидны. Что касается транзитивности, пусть $u, v, w: I \to X$ — три кривые из $a$ в $b$ и $u \sim v$, $v \sim w$. Нам надо показать, что $u \sim w$. По предположению, имеются непрерывные отображения $A, B$: $I \times I \to X$, такие, что для всех $t, s \in I$:

$$A(t, 0) = u(t), \quad A(t, 1) = B(t, 0) = v(t), \quad B(t, 1) = w(t),$$
$$A(0, s) = B(0, s) = a, \quad A(1, s) = B(1, s) = b.$$

Определим $C: I \times I \to X$, полагая

$$C(t, s) := \begin{cases} A(t, 2s) & \text{для} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ B(t, 2s-1) & \text{для} \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $C$ — непрерывное отображение, осуществляющее гомотопию между $u$ и $w$.

**3.3. Лемма.** *Пусть* $u$: $I \longrightarrow X$ *есть кривая в топологическом пространстве* $X$ *и* $\varphi$: $I \longrightarrow I$ — *непрерывное отображение, такое, что* $\varphi(0) = 0$ *и* $\varphi(1) = 1$. *Тогда кривые* $u$ *и* $u \circ \varphi$ *гомотопны.*

*Доказательство.* Определим $A$: $I \times I \longrightarrow X$, полагая

$$A(t, s) := u((1-s)t + s\varphi(t)).$$

Тогда $A$ непрерывно и

$$A(t, 0) = u(t), \qquad A(t, 1) = (u \circ \varphi)(t),$$
$$A(0, s) = u(0), \qquad A(1, s) = u(1)$$

для всех $t, s \in I$. Это показывает, что $u$ и $u \circ \varphi$ гомотопны.

**3.4. Определение.** Пусть $a$, $b$, $c$ — три точки в топологическом пространстве $X$, и пусть $u$: $I \longrightarrow X$ — кривая из $a$ в $b$, а $v$: $I \longrightarrow X$ — кривая из $b$ в $c$.

(i) *Композиция кривых* $u \cdot v$: $I \longrightarrow X$ из $a$ в $c$ определяется условием

$$(u \cdot v)(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(2t-1) & \text{для} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

(ii) *Обратная кривая* $u^-$: $I \longrightarrow X$ из $b$ в $a$ определяется формулой

$$u^-(t) := u(1-t) \quad \text{для всех} \quad t \in I.$$

Таким образом, композиция кривых $u \cdot v$ пробегает сначала точки кривой $u$, а затем точки кривой $v$ с удвоенной скоростью. Обратная кривая $u^-$ пробегает те же точки, что и $u$, только в обратном направлении.

Легко проверить, что если $u$, $u_1$: $I \longrightarrow X$ — две гомотопные кривые из $a$ в $b$ и $v$, $v_1$: $I \longrightarrow X$ — две гомотопные кривые из $b$ в $c$, то $u \cdot v \sim u_1 \cdot v_1$ и $u^- \sim u_1^-$.

**3.5. Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $a \in X$. *Точечной кривой* в $a$ называется постоянное отображение $u_0$: $I \longrightarrow X$, $u_0(t) = a$ для всех $t \in I$.

**3.6. Предложение.** *Пусть* $X$ — *топологическое пространство, и пусть* $a, b, c, d \in X$. *Пусть* $u$, $v$, $w$: $I \longrightarrow X$ — *кривые в* $X$, *такие, что*

$$u(0) = a, \quad u(1) = v(0) = b, \quad v(1) = w(0) = c, \quad w(1) = d.$$

*Пусть, далее,* $u_0$ *есть точечная кривая в* $a$ *и* $v_0$ — *точечная кривая* в $b$. *Тогда*

(i) $u_0 \cdot u \sim u \sim u \cdot v_0$,

(ii) $u \cdot u^- \sim u_0$,

(iii) $(u \cdot v) \cdot w \sim u \cdot (v \cdot w)$.

*Доказательство.* (i) По определению композиции кривых

$$(u_0 \cdot u)(t) := \begin{cases} u_0(2t) = u(0) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ u(2t-1) & \text{для} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда $u_0 \cdot u = u \circ \varphi$, где $\varphi\colon I \to I$ — преобразование параметра, определяемое следующим образом:

$$\varphi(t) = 0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \quad \varphi(t) = 2t-1 \text{ для } 1/2 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поэтому из леммы 3.3 следует, что $u_0 \cdot u \sim u$. Так же доказывается, что $u \cdot v_0 \sim u$.

(ii) Имеем

$$(u \cdot u^-)(t) := \begin{cases} u(2t) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ u(2-2t) & \text{для} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Определим $A\colon I \times I \to X$, полагая

$$A(t, s) := \begin{cases} u(2t(1-s)) & \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ u(2(1-t)(1-s)) & \text{для} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $A$ осуществляет гомотопию между $u \cdot u^-$ и точечной кривой $u_0$.

(iii) Легко подсчитать, что

$$(u \cdot v) \cdot w = (u \cdot (v \cdot w)) \circ \psi,$$

где $\psi\colon I \to I$ — такое преобразование параметра, которое удовлетворяет условиям:

(a) $\psi(0) = 0$, $\psi(1/4) = 1/2$, $\psi(1/2) = 3/4$, $\psi(1) = 1$;

(b) на каждом интервале $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 1]$ отображение $\psi$ линейно.

Поэтому утверждение следует из леммы 3.3.

*Замечание.* Аналогично (iii) пусть вообще $u_1, \ldots, u_n$ — кривые в $X$, такие, что начало каждой $u_{k+1}$ совпадает с концом $u_k$. Тогда композиции $u_1 \cdot u_2 \ldots u_n$ при различной расстановке скобок отличаются только на преобразование параметра $\psi$: $I \to I$ с $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$; в частности, все они гомотопны.

**3.7. Определение.** Кривая $u\colon I \to X$ в топологическом пространстве $X$ называется *замкнутой*, когда $u(0) = u(1)$. Замкнутая кривая с началом и концом в точке $a$ называется *гомотопной нулю*, когда она гомотопна точечной кривой в $a$.

**3.8. Предложение и определение.** *Пусть $X$ — топологическое пространство. Множество $\pi_1(X, a)$ всех гомотопических классов замкнутых кривых в $X$ с начальной и конечной точкой $a$ образует группу относительно операции, индуцируемой компо-*

*зицией кривых,— фундаментальную группу пространства $X$ относительно базисной точки $a$.*

*Обозначение.* Для замкнутой кривой $u$ через $\mathrm{cl}(u)$ обозначается ее гомотопический класс. По определению операции в $\pi_1(X, a)$ имеем $\mathrm{cl}(u)\,\mathrm{cl}(v) = \mathrm{cl}(u \cdot v)$.

*Доказательство.* То, что операция в $\pi_1$ определена корректно, следует из замечания после определения 3.4. Из предложения 3.6 вытекает, что эта операция ассоциативна и что нейтральным элементом является класс кривых, гомотопных нулю. Для обратного элемента имеем $\mathrm{cl}(u)^{-1} = \mathrm{cl}(u^-)$.

**3.9. Зависимость от базисной точки.** Пусть $X$ — топологическое пространство, и пусть точки $a$, $b \in X$ соединены некоторой кривой $w$. Тогда можно определить отображение

$$f\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b),$$

полагая

$$f(\mathrm{cl}(u)) := \mathrm{cl}(w^- \cdot u \cdot w).$$

Легко установить, что это отображение является изоморфизмом. Таким образом, для линейно связного пространства $X$ фундаментальная группа по существу не зависит от базисной точки, и мы часто пишем $\pi_1(X)$ вместо $\pi_1(X, a)$. Однако надо учитывать, что построенный изоморфизм $\pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$ в общем зависит от выбора кривой $w$, соединяющей $a$ и $b$. Если $w_1$ — другая кривая из $a$ в $b$ и $f_1\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$ определяется условием

$$f_1(\mathrm{cl}(u)) := \mathrm{cl}(w_1^- \cdot u \cdot w_1),$$

то автоморфизм

$$F := f_1^{-1} \circ f\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$$

удовлетворяет условию $F(\mathrm{cl}(u)) = \mathrm{cl}(w_1 \cdot w^- \cdot u \cdot w \cdot w_1^-)$, т. е.

$$F(\alpha) = \gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1} \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \pi_1(X, a),$$

где $\gamma$ обозначает гомотопический класс замкнутой кривой $w_1 \cdot w^-$. Если $\pi_1(X, a)$ абелева, то из этих соображений следует, что $\pi_1(X, a)$ и $\pi_1(X, b)$ канонически изоморфны.

**3.10. Определение.** Линейно связное топологическое пространство $X$ называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$.

*Замечание.* Хотя операция в $\pi_1(X)$ записывается мультипликативно, мы пишем $\pi_1(X) = 0$, когда $\pi_1(X)$ состоит из одного нейтрального элемента.

**3.11. Предложение.** *Пусть $X$ — линейно связное односвязное топологическое пространство и $a$, $b \in X$. Тогда любые две кривые $u$, $v$: $I \to X$ из $a$ в $b$ гомотопны.*

*Доказательство.* Пусть $u_0$ — точечная кривая в $a$ и $v_0$ — точечная кривая в $b$. Так как $\pi_1(X, b) = 0$, то $v^- \cdot u \sim v_0$ и, значит, $v \cdot (v^- \cdot u) \sim v \cdot v_0$. По предложению 3.6, $v \cdot (v^- \cdot u) \sim \sim (v \cdot v^-) \cdot u \sim u_0 \cdot u \sim u$ и $v \cdot v_0 \sim v$, т. е. $u \sim v$.

**3.12. Примеры**

(a) Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным* относительно точки $a \in X$, когда для каждой точки $x \in X$ весь отрезок $\lambda a + (1-\lambda) x$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, принадлежит $X$.

Всякое звездное подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ односвязно. В самом деле, пусть $u$: $I \to X$ — замкнутая кривая с начальной и конечной точкой $a$ ($X$ звездно относительно $a$). Тогда отображение

$$A\colon\ I \times I \to X, \quad A(t, s) := sa + (1-s)\, u(t)$$

осуществляет гомотопию $u$ в точечную кривую в $a$ и отсюда следует, что $\pi_1(X, a) = 0$.

В частности, гауссова числовая плоскость $\mathbb{C}$ и всякий круг в $\mathbb{C}$ односвязны. Односвязны $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, где $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ — соответственно положительная и отрицательная вещественные полуоси.

(b) *Риманова числовая сфера* $\mathbb{P}_1$ односвязна. В этом можно убедиться следующим образом. Пусть $U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$ и $U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus \{0\}$. Так как $U_1$ и $U_2$ гомеоморфны $\mathbb{C}$, то они односвязны. Пусть теперь $u$: $I \to \mathbb{P}_1$ — произвольная замкнутая кривая с началом и концом в 0. Так как $I$ — компакт и отображение $u$ непрерывно, то найдется конечное число необязательно замкнутых кривых $u_1, \ldots, u_{2n+1}$: $I \to \mathbb{P}_1$ со следующими свойствами:

(i) композиция кривых

$$v := u_1 \cdot u_2 \ldots u_{2n+1}$$

переводится в $u$ преобразованием параметра и, таким образом, гомотопна $u$;

(ii) кривые $u_{2k+1}$, $k = 0, \ldots, n$, целиком содержатся в $U_1$, а кривые $u_{2k}$, $k = 1, \ldots, n$, целиком содержатся в $U_2$; начальные и конечные точки $u_{2k}$ отличны от $\infty$.

По предложению 3.11, теперь можно подобрать кривые $u'_{2k}$, гомотопные $u_{2k}$ и целиком лежащие в $U_2 \setminus \{\infty\}$. Тогда кривая

$$v' := u_1 \cdot u'_2 \cdot u_3 \ldots u'_{2n} \cdot u_{2n+1}$$

гомотопна $v$, а значит, и $u$, причем $v'$ целиком принадлежит $U_1$. Так как $\pi_1(U_1)=0$, то $v'$, а значит, и $u$ гомотопны нулю.

**3.13. Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $u, v$: $I \to X$ — две замкнутые кривые в $X$ (необязательно с одинаковым началом). Кривые $u$ и $v$ называются *свободно гомотопными* как замкнутые кривые, когда существует непрерывное отображение $A$: $I \times I \to X$ со следующими свойствами:

(i) $A(t, 0) = u(t)$ для всех $t \in I$;

(ii) $A(t, 1) = v(t)$ для всех $t \in I$;

(iii) $A(0, s) = A(1, s)$ для всех $s \in I$.

*Замечание.* Полагая $u_s(t) := A(t, s)$, мы получаем, что каждая $u_s$ является замкнутой кривой в $X$ и $u_0 = u$, $u_1 = v$. Семейство кривых $u_s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, осуществляет деформацию кривой $u$ в кривую $v$.

Пусть $w(t) := A(0, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $w$ — кривая, которая соединяет $a := u(0) = u(1)$ с $b := v(0) = v(1)$; $w(s)$ представляет собой начало и конец кривой $u_s$. Легко сообразить, что $u$ гомотопна кривой $w \cdot v \cdot w^-$ при фиксированной начальной и конечной точке $a$ (рис. 4).

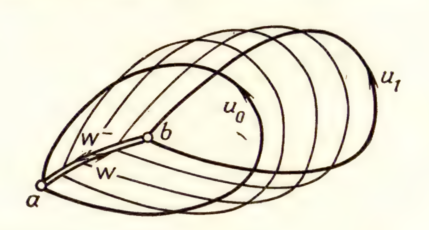



Рис. 4.

**3.14. Предложение.** *Линейно связное топологическое пространство $X$ односвязно тогда и только тогда, когда любые две замкнутые кривые в $X$ свободно гомотопны как замкнутые кривые.*

Простое доказательство предоставляется читателю.

**3.15. Функториальные свойства.** Пусть $f$: $X \to Y$ — непрерывное отображение между топологическими пространствами $X$ и $Y$. Если $u$: $I \to X$ — кривая в $X$, то $f \circ u$: $I \to Y$ — кривая в $Y$. Если $u, u'$: $I \to X$ гомотопны, то их образы $f \circ u$, $f \circ u'$ тоже гомотопны. Поэтому $f$ индуцирует отображение

$$f_*: \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$$

фундаментальных групп. Это отображение является гомоморфизмом групп, так как $f \circ (u \cdot v) = (f \circ u) \cdot (f \circ v)$.

Если $g$: $Y \to Z$ — другое непрерывное отображение, то $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

## § 4. Разветвленные и неразветвленные накрытия

Непостоянные голоморфные отображения между римановыми поверхностями можно рассматривать как (возможно, разветвленные) накрывающие отображения. Поэтому мы сейчас приведем важнейшие понятия и факты из теории накрытий.

Подмножество $A$ топологического пространства называется дискретным, если у каждой точки $a \in A$ есть окрестность $V$, такая, что $V \cap A = \{a\}$. Отображение $p$: $Y \to X$ между двумя топологическими пространствами $X$, $Y$ мы называем дискретным, если прообраз $p^{-1}(x)$ каждой точки $x \in X$ является дискретным подмножеством в $Y$.

**4.1. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — топологические пространства. Отображение $p$: $Y \to X$ называется *накрытием (накрывающим отображением)*, если оно непрерывно, открыто и дискретно.

Если $y \in Y$ и $x := p(y)$, то говорят, что точка $y$ *лежит над* $x$, а точка $x$ является *проекцией* (или *базисной точкой*) $y$.

Если $p$: $Y \to X$ и $q$: $Z \to X$ — два накрытия над $X$, то отображение $f$: $Y \to Z$ называется *послойным*, когда $p = q \circ f$. Это означает, что точка $y \in Y$, которая лежит над точкой $x \in X$, отображается в точку $z$, которая тоже лежит над $x$.

**4.2. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $p$: $Y \to X$ — непостоянное голоморфное отображение. Тогда $p$ — накрывающее отображение.*

*Доказательство.* Отображение $p$ непрерывно и, согласно (2.4), также открыто. Если бы прообраз некоторой точки $a \in X$ не был дискретным, то по теореме единственности (1.11) $p$ должно было бы быть постоянным отображением в точку $a$.

Используется следующая *терминология*. Если $p$: $Y \to X$ — голоморфное накрытие, то $Y$ называется *областью над* $X$. Голоморфная (соотв. мероморфная) функция $f$: $Y \to \mathbb{C}$ (соотв. $f$: $Y \to \mathbb{P}_1$) называется многозначной голоморфной (мероморфной) функцией на $X$. Если $x \in X$ и $p^{-1}(x) = \{y_j: j \in J\}$, то $f(y_j)$, $j \in J$, суть различные значения этой многозначной функции над точкой $x$. (Естественно, может случиться, что $p^{-1}(x)$ состоит из одной точки или пусто.)

Пусть, например, $Y = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C}^*$ и $p = \exp$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$. Тогда тождественному отображению id: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ соответствует многозначный логарифм на $\mathbb{C}^*$, так как для $b \in \mathbb{C}^*$ множество $\exp^{-1}(b)$ состоит в точности из всех различных значений логарифма числа $b$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle \log} & \\ \mathbb{C}^* & & \end{array}$$

**4.3. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — топологические пространства и $p$: $Y \to X$ — накрытие. Точка $y \in Y$ называется *точкой разветвления* для $p$, если у $y$ нет окрестности $V$, такой, что $p|V$ инъективно. Отображение $p$ называется *неразветвленным*, если оно не имеет точек разветвления.

**4.4. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — топологические пространства. Отображение $p$: $Y \to X$ является неразветвленным накрытием тогда и только тогда, когда оно является локально топологическим, т. е. когда у каждой точки $y \in Y$ имеется открытая окрестность $V$, которую $p$ гомеоморфно отображает на некоторое открытое подмножество $U$ в $X$.*

*Доказательство.* Пусть $p$: $Y \to X$ — неразветвленное накрытие и $y \in Y$ — произвольная точка. Так как $y$ не является точкой разветвления, то имеется окрестность $V \ni y$, такая, что $p|V$ инъективно. Так как $p$ непрерывно и открыто, оно отображает множество $V$ гомеоморфно на открытое множество $U := p(V)$.

Обратно, пусть $p$: $Y \to X$ является локально топологическим. Тогда $p$ непрерывно и открыто. Но оно также и дискретно, ибо если $y \in p^{-1}(x)$ и $V$ — открытая окрестность $y$, которую $p$ гомеоморфно отображает на открытое подмножество в $X$, то $V \cap p^{-1}(x) = \{y\}$.

**4.5. Примеры**

(a) Пусть $k$ — натуральное число, $k \geqslant 2$, и отображение $p_k$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ определяется формулой $p_k(z) := z^k$. Тогда $0 \in \mathbb{C}$ является единственной точкой разветвления для $p_k$. Отображение $p_k$: $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ неразветвленное.

(b) Пусть $p$: $Y \to X$ — голоморфное накрывающее отображение, $y \in Y$ и $x := p(y)$. Точка $y$ является точкой разветвления для $p$ в том и только том случае, когда отображение $p$ принимает значение $x$ в точке $y$ с некоторой кратностью $k \geqslant 2$ (см. 2.2). Тогда, по предложению 2.1, локально (в окрестности $y$) $p$ ведет себя так же, как отображение $p_k$ из примера (a) в окрестности нуля.

(c) Отображение exp: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ является неразветвленным накрытием, так как оно отображает инъективно всякое подмножество $V \subset \mathbb{C}$, не содержащее точек, которые отличаются на целочисленное кратное $2\pi i$.

(d) Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка и $\pi$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ — каноническое факторотображение (см. (1.5d)). Тогда $\pi$ — неразветвленное накрытие.

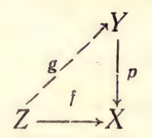
**4.6. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $Y$ — хаусдорфово пространство и $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрывающее отображение. Тогда на $Y$ существует ровно одна комплексная структура, относительно которой $p$ является голоморфным отображением.*

*Замечание.* Согласно (2.5), $p$ тогда даже локально биголоморфно.

*Доказательство.* Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех комплексных карт на $Y$, которые можно получить следующим образом. Пусть $\varphi_1$: $U_1 \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$ — карта комплексной структуры на $X$, и пусть имеется открытое подмножество $U \subset Y$, такое, что $p$: $U \longrightarrow U_1$ является гомеоморфизмом. Тогда $\varphi := \varphi_1 \circ p$: $U \longrightarrow V$ — комплексная карта на $Y$, принадлежащая $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что карты из $\mathfrak{A}$ покрывают все $Y$ и попарно биголоморфно согласованы. Таким образом, $Y$ наделяется при помощи $\mathfrak{A}$ комплексной структурой. При этом проекция $p$ будет локально биголоморфным и, в частности, голоморфным отображением.

Докажем единственность. Пусть $\mathfrak{A}'$ — другой комплексный атлас на $Y$, такой, что отображение $p$: $(Y, \mathfrak{A}') \longrightarrow X$ голоморфно и локально биголоморфно. Тогда тождественное отображение $(Y, \mathfrak{A}) \longrightarrow (Y, \mathfrak{A}')$ локально биголоморфно и, значит, биголоморфно. Поэтому $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ определяют одну и ту же комплексную структуру.

**4.7. Поднятие отображений.** Пусть $X$, $Y$, $Z$ — топологические пространства, $p$: $Y \longrightarrow X$ — накрытие и $f$: $Z \longrightarrow X$ — непрерывное отображение. *Поднятием* $f$ относительно $p$ называется непрерывное отображение $g$: $Z \longrightarrow Y$, такое, что $f = p \circ g$, т. е. следующая диаграмма коммутативна:




**4.8. Предложение** (единственность поднятия). *Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства и $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное на-*

*крытие. Пусть $Z$ есть связное топологическое пространство и $f$: $Z \longrightarrow X$ — непрерывное отображение. Тогда если $g_1$, $g_2$: $Z \longrightarrow \longrightarrow Y$ — два поднятия $f$ относительно $p$ и $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ для некоторой точки $z_0 \in Z$, то $g_1 = g_2$.*

*Доказательство.* Пусть $T := \{z \in Z\colon\ g_1(z) = g_2(z)\}$. Множество $T$ замкнуто, так как оно является прообразом диагонали $\Delta \subset Y \times Y$ при отображении $(g_1, g_2)$: $Z \longrightarrow Y \times Y$. Мы покажем, что $T$ также открыто. Пусть $z \in T$ и $g_1(z) = g_2(z) =: y$. Поскольку $p$ — локально топологическое отображение, имеется окрестность $V \ni y$, которую $p$ гомеоморфно отображает на некоторую окрестность $U$ точки $p(y) = f(z)$. Так как $g_1$ и $g_2$ непрерывны, найдется окрестность $W \ni z$, такая, что $g_i(W) \subset V$. Пусть $\varphi$: $U \longrightarrow V$ есть (непрерывное) отображение, обратное к $p$: $V \longrightarrow U$. Так как $p \circ g_i = f$, то $g_i | W = \varphi \circ (f | W)$ для $i = 1, 2$, т. е. $g_1 | W = g_2 | W$ и, значит, $W \subset T$. Поэтому $T$ открыто. Поскольку $Z$ связно, отсюда следует, что $T = Z$ и, значит, $g_1 = g_2$.

**4.9. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — римановы поверхности, $p$: $Y \longrightarrow X$ — голоморфное неразветвленное накрытие и $f$: $Z \longrightarrow X$ — голоморфное отображение. Тогда любое поднятие $g$: $Z \longrightarrow Y$ отображения $f$ голоморфно.*

*Доказательство.* Пусть $c \in Z$ — произвольная точка, $b := g(c)$ и $a := p(b) = f(c)$. Существуют открытые окрестности $V \ni b$ и $U \ni a$, такие, что отображение $p$: $V \longrightarrow U$ биголоморфно. Пусть $\varphi$: $U \longrightarrow V$ есть (голоморфное) обратное отображение. Так как $g$ непрерывно, то найдется открытая окрестность $W \ni c$, такая, что $g(W) \subset V$. Поскольку $f = p \circ g$, то $g | W = \varphi \circ (f | W)$. Поэтому $g$ голоморфно в точке $c$.

*Вывод.* Пусть $X$, $Y$, $Z$ — римановы поверхности и $p$: $Y \longrightarrow X$, $q$: $Z \longrightarrow X$ — неразветвленные голоморфные накрытия. Тогда всякое послойное непрерывное отображение $f$: $Y \longrightarrow Z$ голоморфно, так как $f$ является поднятием $p$ относительно $q$.

*Поднятие кривых.* Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства и $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрытие. Нас особенно интересует поднятие кривых $u$: $[0, 1] \longrightarrow X$. По предложению 4.8, поднятие $\hat{u}$: $[0, 1] \longrightarrow Y$ кривой $u$, если оно существует, однозначно определяется поднятием начальной точки.

В дальнейшем пусть опять $I := [0, 1]$.

**4.10. Предложение** (поднятие гомотопных кривых). *Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства и $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрытие. Пусть $a, b \in X$ и точка $\hat{a} \in Y$ такова, что $p(\hat{a}) = a$. Далее, пусть задано непрерывное отображение $A$: $I \times I \longrightarrow X$*

*с* $A(0, s) = a$ *и* $A(1, s) = b$ *для всех* $s \in I$. *Положим*

$$u_s(t) := A(t, s).$$

*Каждую кривую* $u_s$ *можно поднять до кривой* $\hat{u}_s$ *с началом в* $\hat{a}$. *Тогда* $\hat{u}_0$ *и* $\hat{u}_1$ *имеют один и тот же конец и гомотопны.*

*Доказательство.* Определим отображение $\hat{A}: I \times I \to Y$, полагая $\hat{A}(t, s) := \hat{u}_s(t)$.

*Утверждение* (*a*). Существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\hat{A}$ непрерывно на $[0, \varepsilon_0) \times I$.

Доказательство. Имеются окрестности $V \ni \hat{a}$ и $U \ni a$, такие, что $p: V \to U$ является гомеоморфизмом. Пусть $\varphi: U \to V$ — обратное отображение. Так как $A(0 \times I) = \{a\}$ и $A$ непрерывно, то существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что $A([0, \varepsilon_0] \times I) \subset U$. Согласно единственности поднятия кривых $u_s$, имеем

$$\hat{u}_s \mid [0, \varepsilon_0] = \varphi \circ u_s \mid [0, \varepsilon_0] \quad \text{для всех} \quad s \in I,$$

т. е. $\hat{A} = \varphi \circ A$ на $[0, \varepsilon_0] \times I$. Отсюда следует, что $A$ непрерывно на $[0, \varepsilon_0) \times I$.

*Утверждение* (*b*). Отображение $\hat{A}$ непрерывно на всем $I \times I$.

Доказательство. Предположим, что существует точка $(t_0, \sigma) \in I \times I$, в которой $\hat{A}$ не является непрерывным. Пусть $\tau$ есть нижняя грань всех значений $t$, таких, что $\hat{A}$ в $(t, \sigma)$ не непрерывно. Согласно (a), $\tau \geqslant \varepsilon_0$.

Пусть $x := A(\tau, \sigma)$ и $y := \hat{A}(\tau, \sigma) = \hat{u}_\sigma(\tau)$. Существуют окрестность $V \ni y$ и окрестность $U \ni x$, такие, что $p: V \to U$ — гомеоморфизм. Пусть $\varphi: U \to V$ — обратное отображение.

Так как $A$ непрерывно, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что $A(I_\varepsilon(\tau) \times I_\varepsilon(\sigma)) \subset U$, где

$$I_\varepsilon(\xi) = \{t \in I : |t - \xi| < \varepsilon\}.$$

В частности, $u_\sigma(I_\varepsilon(\tau)) \subset U$, откуда следует, что

$$\hat{u}_\sigma \mid I_\varepsilon(\tau) = \varphi \circ u_\sigma \mid I_\varepsilon(\tau).$$

Выберем $t_1 \in I_\varepsilon(\tau)$ с $t_1 < \tau$. Тогда

$$\hat{A}(t_1, \sigma) = \hat{u}_\sigma(t_1) \in V.$$

Так как $\hat{A}$ непрерывно в $(t_1, \sigma)$, то найдется $\delta > 0$, $\delta \leqslant \varepsilon$, такое, что

$$\hat{A}(t_1, s) = \hat{u}_s(t_1) \in V \quad \text{для всех} \quad s \in I_\delta(\sigma).$$

Ввиду единственности поднятия мы получаем теперь, что для всех $s \in I_\delta(\sigma)$

$$\hat{u}_s \mid I_\varepsilon(\tau) = \varphi \circ u_s \mid I_\varepsilon(\tau),$$

и, значит, $\hat{A} = \varphi \circ A$ на $I_\varepsilon(\tau) \times I_\delta(\sigma)$, т. е. $\hat{A}$ непрерывно в окрестности $(\tau, \sigma)$. Но это противоречит определению $(\tau, \sigma)$, и поэтому $\hat{A}$ непрерывно на всем $I \times I$.

Так как $A = p \circ \hat{A}$ и $A(\{1\} \times I) = \{b\}$, то $\hat{A}(\{1\} \times I) \subset p^{-1}(b)$. Поскольку $p^{-1}(b)$ дискретно, а $\{1\} \times I$ связно, $\hat{A}(\{1\} \times I)$ может состоять только из одной-единственной точки. Отсюда следует, что кривые $\hat{u}_0$ и $\hat{u}_1$ имеют одинаковые конечные точки и $\hat{A}$ определяет гомотопию между ними.

### Неразветвленные безграничные накрытия

Теперь мы наложим одно условие, при котором поднятие кривых всегда возможно.

**4.11. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — топологические пространства. Отображение $p$: $Y \to X$ называется *безграничным неразветвленным накрытием*, если у каждой точки $x \in X$ имеется открытая окрестность $U$, такая, что прообраз $p^{-1}(U)$ можно представить в виде

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

где $V_j$, $j \in J$, — попарно не пересекающиеся открытые подмножества в $Y$ и все отображения $p$: $V_j \to U$ являются гомеоморфизмами.

(Ясно, что $p$ тогда, в частности, локально топологическое и, значит, неразветвленное в смысле (4.3).)

*Замечание.* В учебниках топологии накрытием чаще всего называют то, что мы здесь называем неразветвленным безграничным накрытием. Однако для теории функций важно рассматривать также и разветвленные и небезграничные накрытия.

**4.12. Примеры.** (a) Пусть $E = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости и $p$: $E \to \mathbb{C}$ — каноническое вложение. Тогда $p$ — хотя и неразветвленное, но не безграничное, так как ни у одной точки $a \in \mathbb{C}$ с $|a| = 1$ нет окрестности со свойствами, требуемыми в определении.

(b) Пусть $k$ — натуральное число, $k \geqslant 2$, и

$$p_k\colon\ \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^k.$$

Тогда $p_k$ — безграничное и неразветвленное накрытие. Пусть $a \in \mathbb{C}^*$ — произвольная точка. Тогда существует $b \in \mathbb{C}^*$, такая, что $p_k(b) = a$. Так как $p_k$ неразветвленное, то имеются открытые окрестности $V_0 \ni b$ и $U \ni a$, такие, что $p_k$: $V_0 \to U$ есть гомеоморфизм. А тогда

$$p_k^{-1}(U) = V_0 \cup \varepsilon V_0 \cup \ldots \cup \varepsilon^{k-1} V_0,$$

где $\varepsilon$ — примитивный корень $k$-й степени из 1, скажем $\varepsilon = \exp(2\pi i/k)$. Если с самого начала взять $V_0$ достаточно малой, то все множества $V_j := \varepsilon^j V_0$, $j = 0, \ldots, k-1$, попарно не пересекаются. Кроме того, каждое $p_k$: $V_j \longrightarrow U$ является гомеоморфизмом.

(c) Отображение $\exp$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ является неразветвленным безграничным накрытием.

*Доказательство.* Пусть даны $a \in \mathbb{C}^*$ и $b \in \mathbb{C}$ с $\exp(b) = a$. Так как отображение $\exp$ неразветвленное, то существуют окрестности $V_0 \ni b$ и $U \ni a$, такие, что $\exp$: $V_0 \longrightarrow U$ есть гомеоморфизм. Имеем

$$\exp^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \quad \text{где } V_n := 2\pi i n + V_0.$$

Если сразу выбрать $V_0$ достаточно малой (например, диаметром $< 2\pi$), то все $V_n$ попарно не пересекаются. Кроме того, каждое отображение $\exp$: $V_n \longrightarrow U$ является гомеоморфизмом.

(d) Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка и $\pi$: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ — каноническое факторотображение. Аналогично примеру (c) можно показать, что $\pi$ — неразветвленное безграничное накрытие.

**4.13.** Мы говорим, что накрытие $p$: $Y \longrightarrow X$ обладает *свойством поднятия кривых*, если для всякой кривой $u$: $[0, 1] \longrightarrow X$ и всякой точки $y_0 \in Y$ с $p(y_0) = u(0)$ существует поднятие $\hat{u}$: $[0, 1] \longrightarrow Y$ кривой $u$ с $\hat{u}(0) = y_0$.

**4.14. Предложение.** *Всякое неразветвленное безграничное накрывающее отображение $p$: $Y \longrightarrow X$ топологических пространств $X$, $Y$ обладает свойством поднятия кривых.*

*Доказательство.* Пусть $u$: $[0, 1] \longrightarrow X$ есть кривая и $y_0 \in Y$, $p(y_0) = u(0)$. Ввиду компактности $[0, 1]$ существуют разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

и открытые множества $U_k \subset X$, $k = 1, \ldots, n$, со следующими свойствами:

(i) $u([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$,

(ii) $p^{-1}(U_k) = \bigcup_{j \in J_k} V_{kj}$, где $V_{kj} \subset Y$ — открытые множества и $p$: $V_{kj} \longrightarrow U_k$ — гомеоморфизмы.

Мы докажем индукцией по $k = 0, 1, \ldots, n$ существование поднятия $\hat{u}$: $[0, t_k] \longrightarrow Y$ с $\hat{u}(0) = y_0$. Начало индукции $k = 0$ тривиально. Пусть $\hat{u}$: $[0, t_{k-1}] \longrightarrow Y$ уже построено и $\hat{u}(t_{k-1}) =: y_{k-1}$. Так как $p(y_{k-1}) = u(t_{k-1}) \subset U_k$, то найдется $j \in J_k$ с $y_{k-1} \in V_{kj}$. Пусть $\varphi$: $U_k \longrightarrow V_{kj}$ — обратное отображение к гомео-

морфизму $p$: $V_{kj} \to U_k$. Мы полагаем

$$\hat{u} \mid [t_{k-1}, t_k] := \varphi \circ (u \mid [t_{k-1}, t_k])$$

и тем самым получаем непрерывное продолжение поднятия $\hat{u}$ на отрезок $[0, t_k]$.

**4.15. Замечание.** Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства, $p$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие и точки $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ таковы, что $p(y_0) = x_0$. Тогда, согласно (4.14) и (4.8), для всякой кривой $u$: $[0, 1] \to X$ с $u(0) = x_0$ существует ровно одно поднятие $\hat{u}$: $[0, 1] \to Y$ с $\hat{u}(0) = y_0$. Если кривая $u$ замкнута, то поднятие $\hat{u}$ не обязательно замкнуто. По этому поводу рассмотрим следующий пример. Пусть $X = Y = \mathbb{C}^*$,

$$p: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^2,$$

и $x_0 = y_0 = 1$. Отображение $u(t) := e^{2\pi i t}$ определяет кривую $u$: $[0, 1] \to \mathbb{C}^*$ с начальной и конечной точкой 1. Отображение $\hat{u}(t) := e^{\pi i t}$ задает поднятие $\hat{u}$: $[0, 1] \to \mathbb{C}^*$ для $u$ относительно $p$; его начало — в точке 1, а конец — в точке $-1$.

И все-таки из предложения 4.10 следует, что всякое поднятие замкнутой кривой, гомотопной нулю, тоже замкнуто и гомотопно нулю.

**4.16. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства, $X$ линейно связно и $p$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие. Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in X$ множества $p^{-1}(x_0)$ и $p^{-1}(x_1)$ равномощны.*

Мощность прообраза $p^{-1}(x)$ $(x \in X)$ называют *числом листов* накрытия (оно может быть конечным или бесконечным).

*Доказательство.* Отображение $\varphi$: $p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ мы построим следующим образом.

Выберем кривую $u$: $[0, 1] \to X$, соединяющую $x_0$ с $x_1$. Если $y \in p^{-1}(x_0)$ — произвольная точка, то существует ровно одно поднятие $\hat{u}$: $[0, 1] \to Y$ для $u$ с $\hat{u}(0) = y$. Положим $\varphi(y) := \hat{u}(1) \in p^{-1}(x_1)$. Из единственности поднятия легко следует, что так построенное отображение биективно, ч. т. д.

*Замечание.* Построенное в доказательстве биективное отображение зависит, вообще говоря, от выбора кривой $u$. Поэтому также и в общем случае не существует никакого однозначного способа нумерации «листов» накрытия.

**4.17. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — хаусдорфовы пространства и $p$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие. Да-*

*лее, пусть $Z$ есть односвязное, линейно связное и локально линейно связное топологическое пространство и $f\colon Z \longrightarrow X$ — непрерывное отображение. Тогда при любом выборе точек $z_0 \in Z$, $y_0 \in Y$ с $f(z_0) = p(y_0)$ существует ровно одно поднятие $\hat{f}\colon Z \longrightarrow Y$ с $\hat{f}(z_0) = y_0$.*

*Замечание.* В следующем доказательстве от накрытия $p$ требуется только то, что оно неразветвленное и обладает свойством поднятия кривых.

*Доказательство.* Определим отображение $\hat{f}\colon Z \longrightarrow Y$ следующим образом.

Пусть $z \in Z$ — произвольная точка и $u\colon I \longrightarrow Z$ — кривая из $z_0$ в $z$. Тогда $v := f \circ u$ — кривая в $X$ с началом $f(z_0)$ и концом $f(z)$. Пусть $\hat{v}\colon I \longrightarrow Y$ — однозначно определенное поднятие $v$ с началом $y_0$. Мы полагаем $\hat{f}(z) := \hat{v}(1)$. Это определение не зависит от выбора кривой $u$ из $z_0$ в $z$. В самом деле, пусть $u_1$ — другая кривая из $z_0$ в $z$. Тогда $u_1$ гомотопна $u$ и, значит, $v_1 := f \circ u_1$ также гомотопна $v = f \circ u$. Поднятия $\hat{v}_1$ и $\hat{v}$ для $v_1$ и $v$ соответственно с $\hat{v}_1(0) = \hat{v}(0) = y_0$ имеют по предложению 4.10 одинаковые концы. Поэтому $\hat{f}(z)$ определено корректно. По построению имеем далее $f = p \circ \hat{f}$.

Остается только еще показать, что отображение $\hat{f}\colon Z \longrightarrow Y$ непрерывно. Пусть $z \in Z$, $y = \hat{f}(z)$ и $V$ — окрестность $y$. Нам надо показать, что существует окрестность $W \ni z$ с $\hat{f}(W) \subset V$. Так как $p$ неразветвленное, то мы можем считать, если надо — уменьшая $V$, что существует окрестность $U$ точки $p(y) = f(z)$, такая, что $p\colon V \longrightarrow U$ есть гомеоморфизм. Пусть $\varphi\colon U \longrightarrow V$ — обратное к нему отображение. Так как $f$ непрерывно, а $Z$ локально линейно связно, то существует линейно связная окрестность $W \ni z$ с $f(W) \subset U$.

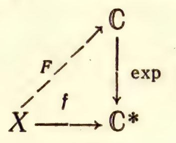
*Утверждение.* $\hat{f}(W) \subset V$.

*Доказательство.* Пусть кривые $u$, $v$, $\hat{v}$ определены, как выше. Пусть $z' \in W$ — произвольная точка и $u'$ — кривая из $z$ в $z'$, которая целиком лежит в $W$. Тогда вся кривая $v' := f \circ u'$ лежит в $U$ и $\hat{v}' := \varphi \circ v'$ есть поднятие $v'$ с начальной точкой $y$. Поэтому композиция $\hat{v} \cdot \hat{v}'$ является поднятием кривой $v \cdot v' = f \circ (u \cdot u')$ с началом в $y_0$. Отсюда

$$\hat{f}(z') = (\hat{v} \cdot \hat{v}')(1) = \hat{v}'(1) \in V, \quad \text{ч. т. д.}$$

**4.18. Пример** (логарифм функции). Пусть $X$ — односвязная риманова поверхность и $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ есть голоморфная функция

на $X$, не принимающая нулевых значений. Мы хотим построить логарифм $f$, т. е. мы ищем голоморфную функцию $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$ с $\exp(F)=f$. Но это условие в точности означает, что $F$ является поднятием $f$ относительно накрытия $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$:




Если $x_0 \in X$ и $c \in \mathbb{C}$ — произвольное решение уравнения $e^c = f(x_0)$, то, согласно предложению 4.17, существует такое поднятие $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$ с $F(x_0)=c$. По предложению 4.9, отображение $F$ голоморфно. Всякое другое решение этой задачи отличается от $F$ на аддитивную константу $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Важный частный случай, когда $X$ — односвязная область в $\mathbb{C}^*$ и $j: X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ — каноническое вложение $(j(z)=z)$. Тогда всякое поднятие $j$ относительно exp является ветвью функции log на $X$.

Аналогично можно построить корни нигде не равной нулю голоморфной функции $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ на односвязной римановой поверхности $X$. Для этого надо рассмотреть накрытия из примера 4.12(b).

**4.19. Предложение.** *Пусть $X$ — многообразие, $Y$ — хаусдорфово пространство и $p: Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрытие со свойством поднятия кривых. Тогда $p$ безгранично.*

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка и $y_j$, $j \in J$, — прообразы $x_0$ относительно $p$. Пусть $U$ — открытая окрестность $x_0$, гомеоморфная шару, и $f: U \longrightarrow X$ — каноническое вложение. Согласно замечанию к предложению 4.17, для всякого $j \in J$ существует поднятие $\hat{f}_j: U \longrightarrow Y$ отображения $f$ с $\hat{f}_j(x_0)=y_j$. Пусть $V_j := \hat{f}_j(U)$. Легко убедиться, что

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

что $V_j$ — попарно не пересекающиеся открытые множества и всякое $p: V_j \longrightarrow U$ является гомеоморфизмом.

**4.20. Собственные отображения.** Локально компактное пространство — это хаусдорфово пространство, в котором каждая точка обладает компактной окрестностью. Непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$ между двумя локально компактными пространствами называется *собственным*, если прообраз всякого компактного множества компактен. Это, например, всегда выполняется, когда $X$ компактно. Собственное отображение

замкнуто, т. е. образ всякого замкнутого множества замкнут. Это следует из того, что подмножество локально компактного пространства замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым компактным множеством компактно.

**4.21. Лемма.** *Пусть $X$, $Y$ — локально компактные пространства и $p$: $Y \to X$ — собственное накрывающее отображение. Тогда*

(a) *Для всякой точки $x \in X$ множество $p^{-1}(x)$ конечно.*

(b) *Пусть $x \in X$ и $V$ — окрестность $p^{-1}(x)$. Тогда существует окрестность $U \ni x$ с $p^{-1}(U) \subset V$.*

(c) *Пусть $X$ связно, а $Y$ непусто. Тогда $p$ сюръективно.*

*Доказательство.* (a) Это следует из того, что $p^{-1}(x)$ — компактное дискретное подмножество в $Y$.

(b) Мы можем считать, что $V$ открыто и, значит, $Y \setminus V$ замкнуто. Тогда $p(Y \setminus V) =: A$ тоже замкнуто и $x \notin A$. Поэтому $U := X \setminus A$ есть открытая окрестность $x$ с $p^{-1}(U) \subset V$.

(c) Множество $p(Y)$ открыто, замкнуто и непусто. Так как $X$ связно, то из этого следует, что $p(Y) = X$.

**4.22. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — локально компактные пространства и $p$: $Y \to X$ — собственное неразветвленное накрывающее отображение. Тогда $p$ — безграничное накрытие.*

*Доказательство.* Пусть $x \in X$ — произвольная точка и $p^{-1}(x) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_i \neq y_j$ для $i \neq j$. Так как $p$ неразветвленное, то для всякого $j = 1, \ldots, n$ найдутся открытая окрестность $W_j \ni y_j$ и открытая окрестность $U_j \ni x$, такие, что $p$: $W_j \to U_j$ есть гомеоморфизм. Мы можем считать, что $W_j$ попарно не пересекаются. Множество $W_1 \cup \ldots \cup W_n$ является окрестностью $p^{-1}(x)$. Согласно (4.21b), существует открытая окрестность $U \subset U_1 \cap \ldots \cap U_n$ точки $x$ с $p^{-1}(U) \subset W_1 \cup \ldots \cup W_n$. Положим $V_j := W_j \cap p^{-1}(U)$; тогда $V_j$ — непересекающиеся открытые множества,

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup \ldots \cup V_n$$

и все отображения $p$: $V_j \to U$, $j = 1, \ldots, n$, суть гомеоморфизмы.

**4.23. Собственные голоморфные отображения.** Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $f$: $X \to Y$ — собственное непостоянное голоморфное отображение. Из предложения 2.1 следует, что множество $A$ точек разветвления отображения $f$ замкнуто и дискретно. Так как $f$ собственное, то $B := f(A)$ тоже замкнуто и дискретно. Множество $B$ называют *множеством критических значений* отображения $f$.

Пусть $Y' := Y \setminus B$ и $X' := X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus A$. Тогда $f\colon X' \to Y'$ есть собственное неразветвленное голоморфное накрытие, которое, согласно (4.22), (4.16) и (4.21a), имеет, таким образом, вполне определенное число листов $n$. Иначе говоря, каждое значение $c \in Y'$ принимается ровно $n$ раз. Чтобы распространить это высказывание и на критические значения $b \in B$, надо учитывать кратность.

Для $x \in X$ обозначим через $v(f, x)$ кратность в смысле (2.2), с которой $f$ принимает значение $f(x)$ в точке $x$. Мы говорим, что $f$ принимает на $X$ значение $c \in Y$ $m$ раз с учетом кратности, если

$$m = \sum_{x \in p^{-1}(c)} v(f, x).$$

**4.24. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $f\colon X \to Y$ — собственное непостоянное голоморфное отображение. Тогда существует натуральное число $n$, такое, что $f$ принимает каждое значение $c \in Y$ $n$ раз с учетом кратности.*

*Доказательство.* Сохраним обозначения из (4.23). В частности, пусть $n$ есть число листов неразветвленного накрытия $f\colon X' \to Y'$. Пусть $b \in B$ есть критическое значение, $p^{-1}(b) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ и $k_j := v(f, x_j)$. Согласно (2.1) и (2.2), имеются непересекающиеся окрестности $U_j \ni x_j$ и $V_j \ni b$, такие, что для каждого $c \in V_j \setminus \{b\}$ множество $p^{-1}(c) \cap U_j$ состоит ровно из $k_j$ точек $(j = 1, \ldots, r)$. По лемме 4.21(b) мы можем найти окрестность $V \subset V_1 \cap \ldots \cap V_r$ точки $b$ с $p^{-1}(V) \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$. Для каждой точки $c \in V \cap Y'$ множество $p^{-1}(c)$ состоит тогда из $k_1 + \ldots + k_r$ точек. С другой стороны, для $c \in Y'$ мощность $p^{-1}(c)$ равна $n$. Отсюда следует, что $n = k_1 + \ldots + k_r$, ч. т. д.

**4.25. Следствие.** *На компактной римановой поверхности $X$ всякая непостоянная мероморфная функция $f\colon X \to \mathbb{P}_1$ имеет столько же нулей, сколько и полюсов (с учетом кратностей).*

Это следует из того, что $f\colon X \to \mathbb{P}_1$ есть собственное отображение.

**4.26. Следствие.** *Многочлен $n$-й степени*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{C}[z]$$

*имеет с учетом кратностей ровно $n$ нулей.*

*Доказательство.* Согласно (2.3), мы понимаем $f$ как голоморфное отображение $f\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$, которое принимает значение $\infty$ с кратностью $n$.

# § 5. Универсальное накрытие, накрывающие преобразования

Среди всех неразветвленных безграничных накрытий многообразия $X$ существует «наибольшее», так называемое универсальное накрытие. Из него можно получить все другие неразветвленные безграничные накрытия. Структура универсального накрытия посредством группы накрывающих преобразований тесно связана с фундаментальной группой $X$. Этими вопросами мы займемся в данном параграфе.

**5.1. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — связные топологические пространства и $p$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие. Отображение $p$ называется *универсальным накрытием*, если выполняется следующее универсальное свойство:

Для всякого связного неразветвленного безграничного накрытия $q$: $Z \to X$ при любом выборе точек $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ с $p(y_0) = q(z_0)$ существует ровно одно непрерывное послойное отображение $f$: $Y \to Z$ с $f(y_0) = z_0$.

Связное топологическое пространство $X$ обладает с точностью до изоморфизма не более чем одним унверсальным накрытием. В самом деле, пусть в указанных выше обозначениях $q$: $Z \to X$ тоже есть универсальное накрытие. Тогда существует послойное непрерывное отображение $g$: $Z \to Y$ с $g(z_0) = y_0$. Композиции $g \circ f$: $Y \to Y$ и $f \circ g$: $Z \to Z$ являются послойными непрерывными отображениями с $g \circ f(y_0) = y_0$ и $f \circ g(z_0) = z_0$ соответственно. Ввиду универсального свойства может существовать только одно послойное непрерывное отображение, которое удовлетворяет этим условиям. Поэтому $g \circ f = \mathrm{id}_Y$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Z$, т. е. $f$: $Y \to Z$ есть послойный гомеоморфизм.

**5.2. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — связные многообразия, $Y$ односвязно и $p$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие. Тогда $p$ есть универсальное накрытие $X$.*

Это следует прямо из определения универсального накрытия и предложения 4.17.

**5.3. Предложение.** *Пусть $X$ — связное многообразие. Тогда существует связное и односвязное многообразие $\tilde{X}$ и неразветвленное безграничное накрывающее отображение $p$: $\tilde{X} \to X$.*

Согласно предложению 5.2, это отображение $\tilde{X} \to X$ является универсальным накрытием $X$.

*Доказательство.* Выделим некоторую точку $x_0 \in X$.

Для $x \in X$ обозначим через $\pi(x_0, x)$ множество гомотопических классов кривых с началом в $x_0$ и концом в $x$. Положим

$$\tilde{X} := \{(x, \alpha): x \in X, \alpha \in \pi(x_0, x)\}.$$

Отображение $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ определяется условием $p(x, \alpha) := x$. Теперь введем в $\tilde{X}$ топологию так, что $\tilde{X}$ будет связным и односвязным хаусдорфовым пространством, а $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ станет неразветвленным безграничным накрытием.

Пусть $(x, \alpha) \in \tilde{X}$ и $U \subset X$ есть открытая связная и односвязная окрестность $x$. Подмножество $[U, \alpha] \subset \tilde{X}$ определим следующим образом: $[U, \alpha]$ состоит из всех точек $(y, \beta) \in \tilde{X}$ с $y \in U$ и $\beta = \mathrm{cl}(u \cdot v)$, где $u$ — кривая из $x_0$ в $x$ с $\alpha = \mathrm{cl}(u)$, а $v$ — кривая из $x$ в $y$, которая целиком лежит в $U$. (Так как $U$ односвязна, то $\beta$ не зависит от выбора кривой $v$.) Пусть $\mathfrak{B}$ есть система всех таких множеств $[U, \alpha]$.

*Утверждение* (*a*). $\mathfrak{B}$ есть базис некоторой топологии на $\tilde{X}$.

Доказательство. (i) Всякая точка в $\tilde{X}$, очевидно, принадлежит по меньшей мере одному $[U, \alpha]$.

(ii) Пусть $(z, \gamma) \in [U, \alpha] \cap [V, \beta]$. Тогда $z \in U \cap V$ и найдется открытая связная и односвязная окрестность $W \subset U \cap V$ точки $z$. А тогда, как легко проверить,

$$(z, \gamma) \in [W, \gamma] \subset [U, \alpha] \cap [V, \beta].$$

Из (i) и (ii) следует утверждение (a).

*Утверждение* (*b*). Отображение $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ является локально топологическим, в частности непрерывным.

Это следует из того, что для каждого $[U, \alpha] \in \mathfrak{B}$ отображение $p$: $[U, \alpha] \longrightarrow U$ есть гомеоморфизм.

*Утверждение* (*c*). $\tilde{X}$ — хаусдорфово пространство.

Достаточно показать, что любые две точки вида $(x, \alpha)$, $(x, \beta) \in \tilde{X}$, где $\alpha \neq \beta$, имеют непересекающиеся окрестности. Пусть $U \subset X$ — открытая связная и односвязная окрестность $x$; тогда $[U, \alpha] \cap [U, \beta] = \varnothing$. В самом деле, в противном случае в этом пересечении имеется некоторый элемент $(y, \gamma)$. Пусть $w$ — кривая в $U$ из $x$ в $y$ и $\alpha = \mathrm{cl}(u)$, $\beta = \mathrm{cl}(v)$. Тогда $\gamma = \mathrm{cl}(u \cdot w) = \mathrm{cl}(v \cdot w)$, откуда следует равенство $\mathrm{cl}(u) = \mathrm{cl}(v)$, которое противоречит предположению, что $\alpha \neq \beta$.

*Утверждение* (*d*). Пусть $u$: $[0, 1] \longrightarrow X$ — кривая с начальной точкой $x_0$. Для $s \in [0, 1]$ пусть $u_s$: $[0, 1] \longrightarrow X$ есть кривая, определяемая условием $u_s(t) := u(st)$. (Кривая $u_s$ пробегает все точки кривой $u$, соответствующие значениям параметра $t \in [0, s]$.) Далее, пусть $v$ — замкнутая кривая в $X$

с началом и концом в $x_0$. Тогда отображение

$$\hat{u}\colon [0,\ 1] \longrightarrow \tilde{X}, \quad t \mapsto (u(t),\ \mathrm{cl}\,(v \cdot u_t)),$$

непрерывно и является поднятием $u$ с $\hat{u}(0) = (x_0,\ \mathrm{cl}\,(v))$. Это следует непосредственно из определения топологии на $\tilde{X}$.

Из утверждения (d) вытекает, что $\tilde{X}$ связно и что $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ обладает свойством поднятия кривых и, значит, согласно (4.19), является безграничным.

*Утверждение* (*e*). $\tilde{X}$ односвязно.

Пусть $\varepsilon$ есть гомотопический класс точечной кривой в $x_0$ и $w\colon [0,\ 1] \longrightarrow \tilde{X}$ — замкнутая кривая с началом и концом в $(x_0,\ \varepsilon)$. Тогда $u := p \circ w$ есть замкнутая кривая в $X$ с $u(0) = x_0$. Пусть $\hat{u}\colon [0,\ 1] \longrightarrow \tilde{X}$ есть поднятие $u$, которое существует, согласно утверждению (d), где в качестве $v$ берется точечная кривая в $x_0$. Ввиду единственности поднятия, $\hat{u} = w$. Отсюда следует, что $\hat{u}(1) = (x_0,\ \mathrm{cl}\,(u)) = (x_0,\ \varepsilon)$ и, значит, $u$ гомотопна нулю. По предложению 4.10, $w$ также гомотопна нулю, и этим показано, что $\tilde{X}$ односвязно. Таким образом, предложение 5.3 доказано.

*Замечание.* В частности, таким способом можно строить универсальное накрытие для каждой римановой поверхности; согласно (4.6), оно естественным образом является тоже римановой поверхностью.

**5.4. Определение.** Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства и $p\colon Y \longrightarrow X$ — накрытие. Под *накрывающим преобразованием* этого накрытия понимается послойный гомеоморфизм $f\colon Y \longrightarrow Y$. Множество всех накрывающих преобразований накрытия $p\colon Y \longrightarrow X$ образует группу относительно композиции отображений, которую мы будем обозначать символом $\mathrm{Deck}\,(Y/X)$.

Иногда во избежание недоразумений мы будем пользоваться более подробным обозначением $\mathrm{Deck}\,(Y \xrightarrow{p} X)$.

**5.5. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — связные хаусдорфовы пространства и $p\colon Y \longrightarrow X$ — неразветвленное безграничное накрытие. Тогда $p$ называется *накрытием Галуа* (или *нормальным накрытием*), если для каждой пары точек $y_0,\ y_1 \in Y$ с $p(y_0) = p(y_1)$ существует накрывающее преобразование $f\colon Y \longrightarrow Y$ с $f(y_0) = y_1$.

*Замечание.* Согласно предложению 4.8, существует не более одного накрывающего преобразования $f\colon Y \longrightarrow Y$ с $f(y_0) = y_1$, так как $f$ является поднятием отображения $p\colon Y \longrightarrow X$.

*Пример.* Отображение $p_k$: $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$, является неразветвленным безграничным накрытием. Это есть накрытие Галуа, так как если $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ и $p_k(z_1) = p_k(z_2)$, то $z_2 = \varepsilon z_1$ для некоторого корня $\varepsilon$ $k$-й степени из 1 и отображение $z \mapsto \varepsilon z$ есть накрывающее преобразование.

Существует связь между накрытиями Галуа и расширениями Галуа для полей, см. (8.12).

**5.6. Предложение.** *Пусть $X$ — связное многообразие и $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ — его универсальное накрытие. Тогда $p$ есть накрытие Галуа и* $\operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ *изоморфна фундаментальной группе* $\pi_1(X)$.

*Доказательство.* (a) Пусть $y_0, y_1 \in \tilde{X}$ и $p(y_0) = p(y_1)$. По определению универсального накрытия, существует послойное непрерывное отображение $f$: $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ с $f(y_0) = y_1$. Надо показать, что $f$ — гомеоморфизм. Это можно сделать следующим образом. Аналогично $f$, существует послойное непрерывное отображение $g$: $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ с $g(y_1) = y_0$. Тогда $f \circ g$ и $g \circ f$ — послойные непрерывные отображения $\tilde{X}$ в себя с $f \circ g(y_1) = y_1$ и $g \circ f(y_0) = y_0$ соответственно. Опять из определения универсального накрытия следует, что $f \circ g$ и $g \circ f$ суть тождественные отображения $\tilde{X}$. Таким образом, $f$ является гомеоморфизмом, а вместе с тем и накрывающим преобразованием. Этим показано, что $\tilde{X} \longrightarrow X$ является накрытием Галуа.

(b) Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in \tilde{X}$ и $p(y_0) = x_0$. Определим отображение

$$\Phi\colon \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

следующим образом. Пусть $\sigma \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ и $v$ — кривая в $\tilde{X}$ с началом в $y_0$ и концом в $\sigma(y_0)$. (Гомотопический класс для $v$ однозначно определен, так как $\tilde{X}$ односвязно.) Кривая $p \circ v$ в $X$ имеет началом и концом точку $x_0$. Пусть $\Phi(\sigma)$ есть гомотопический класс кривой $p \circ v$.

(i) $\Phi$ является гомоморфизмом групп. Пусть $\sigma, \tau \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ и $v, w$ — кривые в $\tilde{X}$ с началом $y_0$ и конечными точками $\sigma(y_0)$ и $\tau(y_0)$ соответственно. Тогда $\sigma \circ w$ — кривая с началом $\sigma(y_0)$ и концом $\sigma\tau(y_0)$. Имеем $p \circ (\sigma \circ w) = p \circ w$. Композиция кривых $v \cdot (\sigma \circ w)$ имеет начало $y_0$ и конец $\sigma\tau(y_0)$. Поэтому

$$\Phi(\sigma\tau) = \operatorname{cl}(p \circ (v \cdot (\sigma \circ w))) = \operatorname{cl}(p \circ v) \operatorname{cl}(p \circ (\sigma \circ w)) =$$
$$= \operatorname{cl}(p \circ v) \operatorname{cl}(p \circ w) = \Phi(\sigma)\Phi(\tau).$$

(ii) $\Phi$ инъективно. Пусть $\sigma \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ и $v$ — кривая в $\tilde{X}$ из $y_0$ в $\sigma(y_0)$ Предположим, что $\Phi(\sigma) = \varepsilon$, т. е. $p \circ v$ гомотопна нулю. Так как $v$ есть поднятие $p \circ v$, то, согласно (4.10), ко-

нец $\sigma(y_0)$ кривой $v$ совпадает с ее началом $y_0$. Из этого следует, что $\sigma=\mathrm{id}_{\tilde{X}}$.

(iii) $\Phi$ сюръективно. Пусть $\alpha\in\pi_1(X, x_0)$ и $u$ — кривая, представляющая $\alpha$. Пусть $v$ — поднятие $u$ на $\tilde{X}$ с началом $y_0$. Концом $v$ пусть будет $y_1$. Существует накрывающее преобразование $\sigma\in\mathrm{Deck}\,(\tilde{X}/X)$ с $\sigma(y_0)=y_1$. Из определения $\Phi$ следует, что $\Phi(\sigma)=\alpha$.

Этим предложение 5.6 доказано.

**5.7. Примеры.** (a) $\exp\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}^*$ является универсальным накрытием для $\mathbb{C}^*$, так как $\mathbb{C}$ односвязна. Для $n\in\mathbb{Z}$ пусть $\tau_n\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ есть сдвиг на $2\pi in$. Имеем $\exp(\tau_n(z))=$ $=\exp(z+2\pi in)=\exp(z)$ для всех $z\in\mathbb{C}$, и, значит, $\tau_n$ есть накрывающее преобразование. Если $\sigma$ — какое-нибудь накрывающее преобразование, то $\exp(\sigma(0))=\exp(0)=1$ и, значит, существует $n\in\mathbb{Z}$ с $\sigma(0)=2\pi in$. Поскольку также $\tau_n(0)=2\pi in$, то $\sigma=\tau_n$. Итак,

$$\mathrm{Deck}\,(\mathbb{C}\xrightarrow{\exp}\mathbb{C}^*)=\{\tau_n\colon\ n\in\mathbb{Z}\}.$$

Так как последняя группа изоморфна $\mathbb{Z}$, то мы получаем, что

$$\pi_1(\mathbb{C}^*)\cong\mathbb{Z}.$$

(b) Рассмотрим левую полуплоскость

$$H=\{z\in\mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}(z)<0\}$$

и проколотый единичный круг

$$E^*=\{z\in\mathbb{C}\colon\ 0<|z|<1\}.$$

Тогда $\exp\colon H\longrightarrow E^*$ является универсальным накрытием. Как и в примере (a), доказывается, что группа накрывающих преобразований состоит из всех переносов на целочисленные кратные $2\pi i$ и что $\pi_1(E^*)\cong\mathbb{Z}$.

(c) Пусть $\Gamma=\mathbb{Z}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_2$ есть решетка в $\mathbb{C}$. Тогда каноническое факторотображение $\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}/\Gamma$ является универсальным накрытием тора $\mathbb{C}/\Gamma$. Для $\gamma\in\Gamma$ обозначим через $\tau_\gamma\colon \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ перенос на $\gamma$. Аналогично примеру (a) можно показать, что $\mathrm{Deck}\,(\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}/\Gamma)\cong\{\tau_\gamma\colon\ \gamma\in\Gamma\}$. Отсюда следует, что

$$\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma)\cong\Gamma\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}.$$

*Вывод.* Не существует двоякопериодической относительно $\Gamma$ мероморфной функции на $\mathbb{C}$, которая $\mathrm{mod}\,\Gamma$ имеет один-единственный полюс первого порядка.

*Доказательство.* Такая функция определяла бы голоморфное отображение $f\colon \mathbb{C}/\Gamma\longrightarrow\mathbb{P}_1$, которое принимает значение $\infty$

лишь однократно. Согласно (4.24) и (2.5), $f$ было бы биголоморфным отображением, и тогда, в частности, $\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \cong \pi_1(\mathbb{P}_1) \cong 0$ — противоречие!

*Замечание*. Позже, в (18.3), мы изучим необходимые и достаточные условия, при которых существует двоякопериодическая мероморфная функция с заданными главными частями. И все же замечательно, что из топологических соображений можно получить приведенное выше утверждение.

**5.8. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — топологические пространства, $p$: $Y \to X$ — накрытие и $G$ — подгруппа в $\mathrm{Deck}(Y/X)$. Точки $y$, $y' \in Y$ называются *эквивалентными по модулю* $G$, если существует $\sigma \in G$ с $\sigma(y) = y'$.

Ясно, что это и в самом деле есть отношение эквивалентности на $Y$.

**5.9. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — связные многообразия, $q$: $Y \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие и $p$: $\tilde{X} \to X$ — универсальное накрытие. Пусть $f$: $\tilde{X} \to Y$ — непрерывное послойное отображение, которое существует по определению универсального накрытия. Тогда $f$ есть неразветвленное безграничное накрытие и существует подгруппа $G \subset \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$, такая, что две точки $x$, $x' \in \tilde{X}$ отображаются при помощи $f$ в одну и ту же точку тогда и только тогда, когда они эквивалентны по модулю $G$. Имеем $G \cong \pi_1(Y)$.*

*Доказательство*. Мы докажем сначала, что $f$ — локально топологическое отображение. Пусть $x \in \tilde{X}$, $p(x) = :s$ и $f(x) = = :y$. Так как $p$ локально топологическое, то имеются открытые окрестности $W_1 \ni x$ и $U_1 \ni s$, такие, что $p$: $W_1 \to U_1$ есть гомеоморфизм. Так как $q$ — неразветвленное безграничное накрытие, то существует принадлежащая $U_1$ связная открытая окрестность $U \ni s$ и попарно не пересекающиеся открытые множества $V_i$, $i \in I$, такие, что $q^{-1}(U) = \bigcup V_i$ и $q$: $V_i \to U$ для каждого $i \in I$ является гомеоморфизмом. Пусть $V$ есть то из множеств $V_i$, в котором лежит точка $y$, и $W := p^{-1}(U) \cap W_1$. Тогда $y \in f(W) \subset q^{-1}(U)$, и так как $f(W)$ связно, то $f(W) = V$. Так как $p$: $W \to U$ и $q$: $V \to U$ суть гомеоморфизмы, то $f$: $W \to V$ — тоже гомеоморфизм. Таким образом, $f$ локально топологическое.

Для доказательства безграничности $f$ рассмотрим кривую $v$ в $Y$ с начальной точкой $y_0$ и точку $x_0 \in \tilde{X}$ с $f(x_0) = y_0$. Покажем, что кривую $v$ можно поднять на $\tilde{X}$ с начальной точкой $x_0$. Так как $p$: $\tilde{X} \to X$ безгранично, то кривую $q \circ v$ можно поднять из $X$ до некоторой кривой $u$ в $\tilde{X}$ с началом $x_0$.

Обе кривые $f \circ u$ и $v$ в $Y$ являются поднятиями кривой $q \circ v$ и имеют одно и то же начало $y_0$, поэтому они совпадают. Таким образом, $u$ есть искомое поднятие $v$. По предложению 4.19, накрытие $f$ безгранично.

Пусть $G := \mathrm{Deck}(\tilde{X}/Y)$. Это есть подгруппа в $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$. Так как $\tilde{X}$ односвязно, то $f\colon \tilde{X} \longrightarrow Y$ — универсальное накрытие $Y$ и накрытие Галуа. Из этого следует, что $G \cong \pi_1(Y)$ и $f(x) = f(x')$ тогда и только тогда, когда существует $\sigma \in G$ с $\sigma(x) = x'$.

Таким образом, предложение 5.9 доказано.

Теперь мы используем его для описания неразветвленных безграничных накрытий проколотого единичного круга $E^* = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < 1\}$.

**5.10. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $f\colon X \longrightarrow E^*$ — голоморфное неразветвленное и безграничное накрытие. Тогда*

(i) *Если накрытие $f$ бесконечнолистно, то существует биголоморфное отображение $\varphi\colon X \longrightarrow H$ поверхности $X$ на левую полуплоскость, такое, что коммутативна диаграмма*

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \exp} & \\ & E^* & \end{array}$$

(ii) *Если это накрытие $k$-листно ($k < \infty$), то существует биголоморфное отображение $\varphi\colon X \longrightarrow E^*$, такое, что коммутативна диаграмма*

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & E^* \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_k} & \\ & E^* & \end{array}$$

*Здесь $p_k\colon E^* \longrightarrow E^*$ есть отображение $z \mapsto z^k$.*

Это предложение означает, что всякое неразветвленное безграничное накрытие над $E^*$ изоморфно накрытию либо логарифма, либо корня $k$-й степени.

*Доказательство.* Так как $\exp\colon H \longrightarrow E^*$ является универсальным накрытием, то существует голоморфное отображение $\psi\colon H \longrightarrow X$ с $\exp = f \circ \psi$. Пусть $G \subset \mathrm{Deck}(H/E^*)$ есть подгруппа, соответствующая $\psi$ по предложению 5.9.

(i) Если $G$ состоит только из тождественного преобразования, то отображение $\psi\colon H \longrightarrow X$ биголоморфно и мы имеем случай (i) нашего утверждения. Искомое отображение $\varphi\colon X \longrightarrow H$ является обратным к $\psi$.

(ii) Имеем

$$\mathrm{Deck}(H/E^*) = \{\tau_n\colon n \in \mathbb{Z}\},$$

где $\tau_n: H \longrightarrow H$ обозначает перенос $z \mapsto z + 2\pi i n$. Поэтому для каждой отличной от единицы подгруппы $G \subset \mathrm{Deck}(H/E^*)$ существует натуральное число $k \geqslant 1$, такое, что

$$G = \{\tau_{kn}: \ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $g$: $H \longrightarrow E^*$ есть неразветвленное безграничное накрытие, определяемое условием $g(z) = \exp(z/k)$. Имеем $g(z) = g(z')$ тогда и только тогда, когда $z$ и $z'$ эквивалентны по модулю $G$. Поэтому существует биективное отображение $\varphi$: $X \longrightarrow E^*$, такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ {\scriptstyle\psi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & E^* \end{array}$$

Так как $\psi$ и $g$ локально биголоморфны, то $\varphi$ — биголоморфное отображение. Теперь легко вычислить, что диаграмма (2) коммутативна; тем самым предложение доказано.

**5.11. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $E$ — единичный круг и $f$: $X \longrightarrow E$ — собственное голоморфное отображение, неразветвленное над $E^* = E \setminus \{0\}$. Тогда существует натуральное число $k \geqslant 1$ и биголоморфное отображение $\varphi$: $X \longrightarrow E$, такое, что коммутативна диаграмма*

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & E \\ {\scriptstyle f}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p_k} \\ & E & \end{array}$$

*где $p_k(z) := z^k$.*

*Доказательство.* Пусть $X^* := f^{-1}(E^*)$. Тогда $f$: $X^* \longrightarrow E^*$ есть неразветвленное собственное накрытие и, по предыдущему предложению, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\varphi} & E^* \\ {\scriptstyle f}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle p_k} \\ & E^* & \end{array}$$

с биголоморфным отображением $\varphi$: $X^* \longrightarrow E^*$.

Покажем теперь, что $f^{-1}(0)$ состоит из одной точки. Предположим, что $f^{-1}(0)$ состоит из $n$ точек $b_1, \ldots, b_n \in X$, $n \geqslant 2$. Тогда существуют непересекающиеся открытые окрестности $V_i \ni b_i$ и круг $E(r) = \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < r\}$, $0 < r \leqslant 1$, такие, что

$$(**) \qquad f^{-1}(E(r)) \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n.$$

Пусть $E^*(r) = E(r) \setminus \{0\}$. Так как $f^{-1}(E^*(r))$ гомеоморфно $p_k^{-1}(E^*(r)) = E^*(\sqrt[k]{r})$, то оно связно. Так как каждая точка $b_i$

является предельной для $f^{-1}(E^*(r))$, то $f^{-1}(E(r))$ тоже связно, а это противоречит (**). Итак, $f^{-1}(0)$ состоит из одной-единственной точки $b \in X$. Поэтому, полагая $\varphi(b) := 0$, отображение $\varphi$: $X^* \longrightarrow E^*$ можно продолжить до биголоморфного отображения $\varphi$: $X \longrightarrow E$, которое делает коммутативной диаграмму (*).

## § 6. Пучки

В теории функций часто приходится иметь дело с функциями в переменных областях определения. Удобную формализацию в таких случаях дает понятие пучка.

**6.1. Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mathfrak{T}$ — система его открытых подмножеств. *Предпучок* абелевых групп на $X$ есть пара $(\mathcal{F}, \rho)$, состоящая из

(i) семейства $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathfrak{T}}$ абелевых групп и

(ii) семейства $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \mathfrak{T}, V \subset U}$ групповых гомоморфизмов

$$\rho_V^U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V) \qquad (V \subset U \text{ открыты})$$

со следующими свойствами:

$$\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} \quad \text{для всех } U \in \mathfrak{T},$$
$$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U \quad \text{для } W \subset V \subset U.$$

*Замечание.* Чаще всего пишут коротко $\mathcal{F}$ вместо $(\mathcal{F}, \rho)$. Гомоморфизмы $\rho_V^U$ называются *гомоморфизмами сужения*. Вместо $\rho_V^U(f)$ с $f \in \mathcal{F}(U)$ пишут кратко $f|V$.

Аналогично предпучкам абелевых групп, можно определить также предпучки векторных пространств, колец, множеств и т. д.

**6.2. Пример.** Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство. Для открытого подмножества $U \subset X$ пусть $\mathscr{C}(U)$ есть векторное пространство всех непрерывных функций $f$: $U \longrightarrow \mathbb{C}$. Для $V \subset U$ пусть $\rho_V^U$: $\mathscr{C}(U) \longrightarrow \mathscr{C}(V)$ есть обычное отображение сужения. Тогда $(\mathscr{C}, \rho)$ является предпучком векторных пространств на $X$.

**6.3. Определение.** Предпучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве $X$ называется *пучком*, когда для всякого открытого множества $U \subset X$ и всякого семейства открытых подмножеств $U_i \subset U$, $i \in I$, с $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ выполняются следующие условия (аксиомы пучка):

(I) если элементы $f, g \in \mathcal{F}(U)$ таковы, что $f|U_i = g|U_i$ для всех $i \in I$, то $f = g$;

(II) пусть заданы элементы $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, такие, что
$$f_i | U_i \cap U_j = f_j | U_i \cap U_j \quad \text{для всех } i, j \in I;$$
тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ с $f | U_i = f_i$ для всех $i \in I$.

*Замечание.* Элемент $f$, существование которого гарантируется условием (II), определяется, согласно (I), однозначно.

Применяя (I) и (II) к случаю $U = \varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} U_i$, мы получаем, что $\mathcal{F}(\varnothing)$ состоит ровно из одного элемента.

**6.4. Примеры.** (a) Для всякого топологического пространства $X$ определенный в (6.2) предпучок $\mathcal{C}$ является пучком. Обе аксиомы пучка (I) и (II), очевидно, выполняются.

(b) Пусть $X$ — риманова поверхность и $\mathcal{O}(U)$ — кольцо голоморфных функций на открытом подмножестве $U \subset X$. Вместе с обычным отображением сужения $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ для $V \subset U$ получается пучок $\mathcal{O}$ голоморфных функций на $X$. Аналогично определяется пучок $\mathcal{M}$ мероморфных функций на $X$.

(c) Для открытого подмножества $U$ римановой поверхности $X$ пусть $\mathcal{O}^*(U)$ есть мультипликативная группа всех голоморфных отображений $f$: $U \to \mathbb{C}^*$. С обычными отображениями сужения получается пучок $\mathcal{O}^*$ (мультипликативных) абелевых групп. Аналогично определяется пучок $\mathcal{M}^*$: $\mathcal{M}^*(U)$ для открытого множества $U \subset X$ состоит из всех мероморфных функций $f \in \mathcal{M}(U)$, которые не равны тождественно нулю ни на какой связной компоненте $U$.

(d) Пусть $X$ — произвольное топологическое пространство и $G$ — абелева группа. Определим предпучок $\mathcal{G}$ на $X$ следующим образом: для непустого открытого подмножества $U \subset X$ пусть $\mathcal{G}(U) := G$ и $\mathcal{G}(\varnothing) := 0$. Морфизмами сужений пусть будут $\rho_V^U = \mathrm{id}_G$ для $V \neq \varnothing$, а $\rho_\varnothing^U$ пусть будет нулевой гомоморфизм. Если в $G$ имеется по крайней мере два различных элемента $g_1$, $g_2$, а в $X$ — два непересекающихся непустых открытых подмножества $U_1$, $U_2$, то $\mathcal{G}$ не является пучком, так как нарушается аксиома (II): $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $g_1 | U_1 \cap U_2 = 0 = g_2 | U_1 \cap U_2$, но не существует такого $f \in \mathcal{G}(U_1 \cup U_2) = G$, что $f | U_1 = g_1$ и $f | U_2 = g_2$.

(e) Предыдущий пример можно слегка модифицировать и получить пучок: для открытого множества $U$ пусть $\tilde{\mathcal{G}}(U)$ есть абелева группа всех локально постоянных отображений $g$: $U \to G$. (Если $U \neq \varnothing$ — связное открытое множество, то $\tilde{\mathcal{G}}(U) = G$.) Для $V \subset U$ пусть $\tilde{\mathcal{G}}(U) \to \tilde{\mathcal{G}}(V)$ есть обычное сужение. Тогда $\tilde{\mathcal{G}}$ — пучок на $X$. Он называется пучком локально постоянных функций со значениями в $G$. Чаще всего он обозначается тем же символом $G$.

**6.5. Слои предпучка.** Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок множеств на топологическом пространстве $X$ и точка $a \in X$. В дизъюнктном объединении

$$\bigcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U)$$

по всем открытым окрестностям $U \ni a$ введем следующее отношение эквивалентности $\underset{a}{\sim}$: элементы $f \in \mathcal{F}(U)$ и $g \in \mathcal{F}(V)$ эквивалентны, $f \underset{a}{\sim} g$, тогда и только тогда, когда существует открытое множество $W$, такое, что $a \in W \subset U \cap V$ и $f \mid W = g \mid W$. Легко убедиться, что это в самом деле есть оношение эквивалентности. Множество $\mathcal{F}_a$ всех классов эквивалентности, так называемый индуктивный предел $\mathcal{F}(U)$,

$$\mathcal{F}_a := \varinjlim_{U \ni a} \mathcal{F}(U) := \Big(\bigcup_{U \ni a} \mathcal{F}(U)\Big) / \underset{a}{\sim},$$

называется *слоем* предпучка $\mathcal{F}$ в точке $a$. Если $\mathcal{F}$ — предпучок абелевых групп (векторных пространств, колец), то слой $\mathcal{F}_a$ относительно операции на представителях тоже является абелевой группой (соотв. векторным пространством, кольцом).

Для открытого множества $U \ni a$ пусть

$$\rho_a \colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_a$$

есть отображение, которое каждому элементу $f \in \mathcal{F}(U)$ ставит в соответствие его класс эквивалентности по отношению $\underset{a}{\sim}$; $\rho_a(f)$ называется *ростком* $f$ в точке $a$.

В качестве примера рассмотрим пучок $\mathcal{O}$ голоморфных функций в области $X \subset \mathbb{C}$. Пусть $a \in X$. *Росток голоморфных функций* $\varphi \in \mathcal{O}_a$ представляется голоморфной функцией в открытой окрестности $a$, и эту функцию можно разложить в ряд Тейлора $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu$ с положительным радиусом сходимости.

Две голоморфные функции в окрестности $a$ определяют один и тот же росток в $a$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые тейлоровские разложения в точке $a$. Таким образом, имеется изоморфизм между слоем $\mathcal{O}_a$ и кольцом $\mathbb{C}\{z-a\}$ всех сходящихся степенных рядов от $z-a$ с комплексными коэффициентами. Аналогично, кольцо $\mathcal{M}_a$ *ростков мероморфных функций* в $a$ изоморфно кольцу всех сходящихся рядов Лорана

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} c_\nu (z-a)^\nu, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad c_\nu \in \mathbb{C},$$

с конечной главной частью,

Для ростка $\varphi \in \mathcal{O}_a$ значение $\varphi(a) \in \mathbb{C}$ определено корректно (т. е. не зависит от представителя).

**6.6. Лемма.** *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве $X$ и $U \subset X$ — открытое подмножество. Элемент $f \in \mathcal{F}(U)$ равняется нулю тогда и только тогда, когда все его ростки $\rho_x(f) \in \mathcal{F}_x$, $x \in U$, равны нулю.*

Это следует непосредственно из аксиомы (I).

**6.7. Накрывающее пространство, соответствующее предпучку.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mathcal{F}$ — предпучок на $X$. Пусть

$$|\mathcal{F}| := \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

есть дизъюнктное объединение всех слоев. Обозначим через

$$p\colon |\mathcal{F}| \longrightarrow X$$

отображение, которое элементу $\varphi \in \mathcal{F}_x$ сопоставляет точку $x$. Теперь введем в $|\mathcal{F}|$ топологию.

Для открытого подмножества $U \subset X$ и элемента $f \in \mathcal{F}(U)$ пусть

$$[U, f] := \{\rho_x(f)\colon\ x \in U\} \subset |\mathcal{F}|.$$

**6.8. Предложение.** *Система $\mathfrak{B}$ всех множеств $[U, f]$, $U$ открыто в $X$, $f \in \mathcal{F}(U)$, является базисом топологии в $|\mathcal{F}|$. Проекция $p\colon |\mathcal{F}| \longrightarrow X$ есть локально топологическое отображение, т. е. неразветвленное накрытие.*

*Доказательство.* (a) Чтобы показать, что $\mathfrak{B}$ образует базис топологии в $|\mathcal{F}|$, надо доказать два факта:

(i) Каждый элемент $\varphi \in |\mathcal{F}|$ содержится по крайней мере в одном $[U, f]$. Это тривиально.

(ii) Если $\varphi \in [U, f] \cap [V, g]$, то существует $[W, h] \in \mathfrak{B}$, для которого $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$. В самом деле, пусть $p(\varphi) = x$. Тогда $x \in U \cap V$ и $\varphi = \rho_x(f) = \rho_x(g)$. Поэтому существует открытая окрестность $W \subset U \cap V$ точки $x$ с $f|W = g|W =: h$. Отсюда следует, что $\varphi \in [W, h] \subset [U, f] \cap [V, g]$, ч. т. д.

(b) Покажем теперь, что $p\colon |\mathcal{F}| \longrightarrow X$ — локально топологическое отображение. Пусть $\varphi \in |\mathcal{F}|$ и $p(\varphi) = x$. Найдется $[U, f] \in \mathfrak{B}$, такое, что $\varphi \in [U, f]$. Тогда $[U, f]$ — открытая окрестность $\varphi$ и $U$ — открытая окрестность $x$. Отображение $p\colon [U, f] \longrightarrow U$ биективно и, как вытекает прямо из определений, непрерывно и открыто. Таким образом, $p\colon |\mathcal{F}| \longrightarrow X$ локально топологическое.

**6.9. Определение.** Говорят, что предпучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством $X$ *удовлетворяет теореме единствен-*

*ности*, когда справедливо следующее: если $Y \subset X$ — область и $f, g \in \mathcal{F}(Y)$ — элементы, у которых ростки $\rho_a(f)$ и $\rho_a(g)$ совпадают в некоторой точке $a \in Y$, то $f = g$.

Это условие выполняется, например, для пучков $\mathcal{O}$ и $\mathcal{M}$ голоморфных, соответственно мероморфных функций на римановой поверхности $X$.

**6.10. Предложение.** *Пусть $X$ — локально связное хаусдорфово пространство и $\mathcal{F}$ — предпучок на $X$, удовлетворяющий теореме единственности. Тогда топологическое пространство $|\mathcal{F}|$ хаусдорфово.*

*Доказательство.* Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in |\mathcal{F}|$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Надо найти непересекающиеся окрестности для $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

*Случай 1.* $p(\varphi_1) =: x \neq y := p(\varphi_2)$. Так как $X$ хаусдорфово, то существуют непересекающиеся окрестности $U \ni x$ и $V \ni y$. Тогда $p^{-1}(U)$ и $p^{-1}(V)$ — непересекающиеся окрестности $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответственно.

*Случай 2.* $p(\varphi_1) = p(\varphi_2) =: x$. Ростки $\varphi_i \in \mathcal{F}_x$ представляются элементами $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, где $U_i$ — открытые окрестности $x$ $(i = 1, 2)$. Имеется связная открытая окрестность $U \subset U_1 \cap U_2$ точки $x$. Тогда $[U, f_i | U]$ — открытая окрестность $\varphi_i$. Предположим, что существует $\psi \in [U, f_1 | U] \cap [U, f_2 | U]$. Пусть $p(\psi) = y$. Тогда $\psi = \rho_y(f_1) = \rho_y(f_2)$. Из теоремы единственности следует, что $f_1 | U = f_2 | U$ и, значит, $\varphi_1 = \varphi_2$ — противоречие! Поэтому $[U, f_1 | U]$ и $[U, f_2 | U]$ не имеют общих точек, ч. т. д.

## § 7. Аналитическое продолжение

Теперь мы перейдем к построению римановых поверхностей для функций, которые получаются аналитическим продолжением некоторого функционального ростка.

**7.1. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность, $u: [0, 1] \to X$ — кривая и $u(0) =: a$, $u(1) =: b$. Говорят, что росток голоморфных функций $\psi \in \mathcal{O}_b$ получается из ростка голоморфных функций $\varphi \in \mathcal{O}_a$ *аналитическим продолжением вдоль кривой* $u$, если существует семейство $\varphi_t \in \mathcal{O}_{u(t)}$, $t \in [0, 1]$, функциональных ростков, такое, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$ и для всякого $\tau \in [0, 1]$ найдется окрестность $T \subset [0, 1]$ параметра $\tau$, открытое множество $U \subset X$ с $u(T) \subset U$ и функция $f \in \mathcal{O}(U)$ с

$$\rho_{u(t)}(f) = \varphi_t \quad \text{для всех} \quad t \in T.$$

Здесь $\rho_{u(t)}(f)$ есть росток $f$ в точке $u(t)$.

Ввиду компактности [0, 1] это условие эквивалентно следующему (см. рис. 5): существуют разбиение $0=t_0<t_1<\ldots$ $\ldots<t_{n-1}<t_n=1$ отрезка [0, 1], области $U_i\subset X$ с $u([t_{i-1}, t_i])\subset$ $\subset U_i$ и голоморфные функции $f_i\in\mathcal{O}(U_i)$ $(i=1, \ldots, n)$, такие, что:

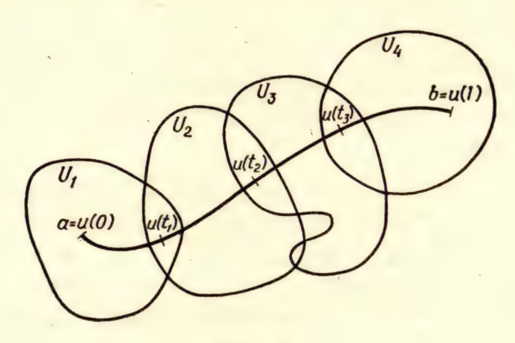



Рис. 5.

(i) $\varphi$ есть росток $f_1$ в точке $a$, а $\psi$ — росток $f_n$ в точке $b$;

(ii) $f_i|V_i=f_{i+1}|V_i$ для $i=1, \ldots, n-1$, где $V_i$ — связная компонента в $U_i\cap U_{i+1}$, содержащая точку $u(t_i)$.

Следующая лемма показывает, как можно интерпретировать аналитическое продолжение вдоль кривой при помощи накрытия $p\colon |\mathcal{O}|\to X$, которое согласно (6.7) строится из пучка голоморфных функций.

**7.2. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $u\colon[0, 1]\to$ $\to X$ — кривая в $X$ с $u(0)=:a$ и $u(1)=:b$. Тогда росток $\psi\in\mathcal{O}_b$ является аналитическим продолжением ростка $\varphi\in\mathcal{O}_a$ вдоль $u$ в том и только том случае, когда существует поднятие $\hat{u}\colon[0, 1]\to|\mathcal{O}|$ кривой $u$ с $\hat{u}(0)=\varphi$ и $\hat{u}(1)=\psi$.*

*Доказательство.* (a) Пусть $\psi\in\mathcal{O}_b$ — аналитическое продолжение ростка $\varphi\in\mathcal{O}_a$ вдоль $u$. Пусть $\varphi_t\in\mathcal{O}_{u(t)}$, $t\in[0, 1]$, — семейство ростков из определения 7.1. Непосредственно из определения топологии в $|\mathcal{O}|$ следует, что соответствие $t\mapsto\varphi_t$ задает непрерывное отображение $\hat{u}\colon[0, 1]\to|\mathcal{O}|$. Это $\hat{u}$ является поднятием $u$ и $\hat{u}(0)=\varphi_0=\varphi$, а $\hat{u}(1)=\varphi_1=\psi$.

(b) Дано поднятие $\hat{u}\colon[0, 1]\to|\mathcal{O}|$ для $u$ с $\hat{u}(0)=\varphi$ и $\hat{u}(1)=\psi$. Для $t\in[0, 1]$ положим $\varphi_t:=\hat{u}(t)$. Тогда $\varphi_t\in\mathcal{O}_{u(t)}$ и $\varphi_0=\varphi$, $\varphi_1=\psi$. Пусть $\tau\in[0, 1]$ и $[U, f]\subset|\mathcal{O}|$ — открытая окрестность $\hat{u}(\tau)$. Тогда найдется окрестность $T\subset[0, 1]$ параметра $\tau$ с $\hat{u}(T)\subset[U, f]$. Из этого следует, что $u(T)\subset U$ и $\varphi_t=\hat{u}(t)=$

$=\rho_{u(t)}(f)$ для всех $t \in T$. Это означает, что $\psi$ является аналитическим продолжением $\varphi$ вдоль $u$, ч. т. д.

Из единственности поднятия (предложение 4.8) следует с учетом этой леммы, что аналитическое продолжение функционального ростка вдоль кривой, если оно существует, определяется однозначно. Дальнейшим следствием этой леммы является теорема о монодромии.

**7.3. Теорема о монодромии.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, и пусть $u_0, u_1$: $[0, 1] \to X$ — две гомотопные кривые из $a$ в $b$. Пусть $u_s$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, есть деформация $u_0$ в $u_1$ и $\varphi \in \mathcal{O}_a$ — функциональный росток, который допускает аналитическое продолжение вдоль каждой кривой $u_s$. Тогда в результате аналитического продолжения $\varphi$ вдоль $u_0$ и $u_1$ получается один и тот же росток $\psi \in \mathcal{O}_b$.*

Для доказательства надо просто применить предложение 4.10 к накрытию $|\mathcal{O}| \to X$. При этом надо учитывать, что, по предложению 6.10, пространство $|\mathcal{O}|$ хаусдорфово.

**7.4. Следствие.** *Пусть $X$ — односвязная риманова поверхность, $a \in X$ и $\varphi \in \mathcal{O}_a$ — росток, неограниченно продолжаемый в $X$, т. е. аналитически продолжаемый вдоль любой кривой, выходящей из $a$. Тогда существует голоморфная на всей $X$ функция $f \in \mathcal{O}(X)$ с $\rho_a(f) = \varphi$.*

*Замечание.* Ввиду теоремы единственности $f$ определена однозначно.

*Доказательство.* Для $x \in X$ пусть $\psi_x \in \mathcal{O}_x$ есть росток, который получается из $\varphi$ аналитическим продолжением вдоль какой-нибудь кривой, идущей из $a$ в $x$. Так как $X$ односвязна, то $\psi_x$ не зависит от выбора кривой. Положим $f(x) := \psi_x(x)$. Тогда $f$ есть голоморфная на $X$ функция с $\rho_a(f) = \varphi$, ч. т. д.

**7.5.** Если аналитическое продолжение возможно вдоль двух кривых с одними и теми же началом и концом, то из одного функционального ростка получается, вообще говоря, два различных функциональных ростка. Объединяя все аналитические продолжения заданного ростка в одну функцию, мы приходим к многозначным функциям. Это понятие нуждается в уточнении.

Пусть $X$ и $Y$ — римановы поверхности, $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$ соответственно — пучки голоморфных на них функций и $p$: $Y \to X$ — голоморфное неразветвленное накрывающее отображение. Для $y \in Y$ отображение $p$, будучи локально биголоморфным, индуцирует изоморфизм $p^*$: $\mathcal{O}_{X, p(y)} \to \mathcal{O}_{Y, y}$. Пусть

$$p_*: \mathcal{O}_{Y, y} \to \mathcal{O}_{X, p(y)}$$

есть отображение, обратное к $p^*$.

**7.6. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность, точка $a \in X$ и $\varphi \in \mathcal{O}_a$ — функциональный росток. Четверка $(Y, p, f, b)$ называется *аналитическим продолжением* $\varphi$, если:

(i) $Y$ есть риманова поверхность и $p$: $Y \longrightarrow X$ — голоморфное неразветвленное накрытие;

(ii) $f$ — голоморфная на $Y$ функция;

(iii) $b$ — точка в $Y$ с $p(b) = a$ и

$$p_*(\rho_b(f)) = \varphi.$$

Аналитическое продолжение $(Y, p, f, b)$ ростка $\varphi$ называется *максимальным*, когда оно обладает следующим универсальным свойством: если $(Z, q, g, c)$ — другое аналитическое продолжение $\varphi$, то существует послойное голоморфное отображение $F$: $Z \to Y$ с $F(c) = b$ и $F^*(f) = g$.

Максимальное аналитическое продолжение определяется однозначно с точностью до изоморфизма. А именно, в принятых выше обозначениях пусть $(Z, q, g, c)$ наряду с $(Y, p, f, b)$ — тоже максимальное аналитическое продолжение $\varphi$. Тогда существует послойное голоморфное отображение $G$: $Y \longrightarrow Z$ с $G(b) = c$ и $G^*(g) = f$. Композиция $F \circ G$ является послойным голоморфным отображением $Y$ на себя, оставляющим на месте точку $b$. Поэтому, согласно предложению 4.8, $F \circ G = \mathrm{id}_Y$. Таким же образом доказывается, что $G \circ F = \mathrm{id}_Z$. Отсюда следует, что $G$: $Y \longrightarrow Z$ — биголоморфное отображение.

**7.7. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $a \in X$, $\varphi \in \mathcal{O}_a$ и $(Y, p, f, b)$ — аналитическое продолжение $\varphi$. Тогда если $v$: $[0, 1] \longrightarrow Y$ — кривая с $v(0) = b$ и $v(1) =: y$, то росток $\psi := p_*(\rho_y(f)) \in \mathcal{O}_{p(y)}$ является аналитическим продолжением $\varphi$ вдоль кривой $u := p \circ v$.*

*Доказательство.* Для $t \in [0, 1]$ положим $\varphi_t := p_*(\rho_{v(t)}(f)) \in \mathcal{O}_{p(v(t))} = \mathcal{O}_{u(t)}$. Имеем $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_1 = p_*(f_y) = \psi$. Пусть $t_0 \in [0, 1]$. Так как $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрытие, то имеются открытые окрестности $V \subset Y$ и $U \subset X$ точек $v(t_0)$ и $p(v(t_0)) = u(t_0)$ соответственно, такие, что $p$: $V \longrightarrow U$ биголоморфно. Пусть $q$: $U \longrightarrow V$ есть обратное отображение и $g := q^*(f \mid V) \in \mathcal{O}(U)$. Тогда $p_*(\rho_\eta(f)) = \rho_{p(\eta)}(g)$ для всех $\eta \in V$. Существует окрестность $T \subset [0, 1]$ параметра $t_0$ с $v(T) \subset V$, т. е. $u(T) \subset U$. Для всех $t \in T$ имеем

$$\rho_{u(t)}(g) = p_*(\rho_{v(t)}(f)) = \varphi_t.$$

Тем самым доказано, что $\psi$ есть аналитическое продолжение $\varphi$ вдоль $u$.

**7.8. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $a \in X$ и $\varphi \in \mathcal{O}_a$ — росток голоморфных функций в точке $a$. Тогда для $\varphi$ существует максимальное аналитическое продолжение $(Y, p, f, b)$.*

*Доказательство.* Пусть $Y$ есть связная компонента пространства $|\mathcal{O}|$, в которой лежит $\varphi$. Сужение отображения $p$: $|\mathcal{O}| \longrightarrow X$ на $Y$ мы обозначим тоже через $p$. Тогда $p$: $Y \longrightarrow X$ — неразветвленное накрывающее отображение. Снабдим $Y$, согласно предложению 4.6, комплексной структурой; тогда $Y$ будет римановой поверхностью и отображение $p$: $Y \longrightarrow X$ голоморфно. Голоморфную функцию $f$: $Y \longrightarrow \mathbb{C}$ определим следующим образом. Каждая $\eta \in Y$ по определению является функциональным ростком в точке $p(\eta)$. Положим $f(\eta) := \eta(p(\eta))$. Легко видеть, что $f$ голоморфна и что $p_*(\rho_\eta(f)) = \eta$ для всех $\eta \in Y$. Поэтому, полагая $b := \varphi$, мы получаем, что $(Y, p, f, b)$ есть аналитическое продолжение $\varphi$.

Покажем теперь, что $(Y, p, f, b)$ — максимальное аналитическое продолжение $\varphi$. Пусть $(Z, q, g, c)$ — другое аналитическое продолжение $\varphi$. Отображение $F$: $Z \longrightarrow Y$ определим следующим образом. Пусть $\zeta \in Z$ и $q(\zeta) =: x$. По лемме 7.7, функциональный росток $q_*(\rho_\zeta(g)) \in \mathcal{O}_x$ получается из ростка $\varphi$ аналитическим продолжением вдоль кривой из $a$ в $x$. По лемме 7.2, $Y$ состоит из всех функциональных ростков, которые можно получить из $\varphi$ аналитическим продолжением вдоль кривых. Поэтому существует ровно одно $\eta \in Y$ с $q_*(\rho_\zeta(g)) = \eta$. Положим $F(\zeta) = \eta$. Легко проверить, что $F$: $Z \longrightarrow Y$ — голоморфное послойное отображение с $F(c) = b$ и $F^*(f) = g$, ч. т. д.

*Замечание.* Точно так же, как для ростков голоморфных функций, можно строить аналитические продолжения для ростков мероморфных функций. При этом используется накрывающее пространство $|\mathcal{M}| \longrightarrow X$. Ветвления мы полностью исключили из рассмотрения. В следующих параграфах при изучении специального случая алгебраических функций мы все-таки будем учитывать и ветвления.

## § 8. Алгебраические функции

Простейшим примером многозначной аналитической функции является корень. Это частный случай так называемых алгебраических функций, т. е. функций $w = w(z)$, удовлетворяющих некоторому алгебраическому уравнению $w^n + a_1(z) w^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_0(z) = 0$, где коэффициенты $a_\nu$ суть заданные мероморфные функции от $z$. В этом параграфе мы построим римановы поверхности алгебраических функций. Они оказываются соб-

ственными накрытиями, число листов которых равно степени алгебраического уравнения (если оно неприводимо).

**8.1. Элементарные симметрические функции.** Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности, $\pi\colon Y \to X$ — собственное неразветвленное голоморфное $n$-листное накрытие и $f$ — мероморфная функция на $Y$. Каждая точка $x \in X$ обладает открытой окрестностью $U$, такой, что $\pi^{-1}(U)$ есть дизъюнктное объединение открытых множеств $V_1, \ldots, V_n$ и отображения $\pi\colon V_\nu \to U$ биголоморфны $(\nu = 1, \ldots, n)$. Пусть $\tau_\nu\colon U \to V_\nu$ — обратные отображения к $\pi\colon V_\nu \to U$ и $f_\nu := \tau_\nu^* f$. Пусть $T$ — переменная и

$$\prod_{\nu=1}^{n} (T - f_\nu) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n.$$

Тогда $c_\nu$ суть мероморфные функции в $U$, а именно

$$c_\nu = (-1)^\nu s_\nu (f_1, \ldots, f_n),$$

где $s_\nu$ обозначает $\nu$-й элементарный симметрический многочлен от $n$ переменных. Проводя ту же конструкцию над окрестностью $U'$ другой точки $x' \in X$, мы получаем над $U \cap U'$ те же самые функции $c_1, \ldots, c_n$, которые таким образом склеиваются в глобальные мероморфные функции $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}(X)$. Мы называем $c_1, \ldots, c_n$ элементарными симметрическими функциями от $f$ относительно накрытия $Y \to X$.

**8.2. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $\pi\colon Y \to X$ — собственное голоморфное $n$-листное накрывающее отображение. Пусть $A \subset X$ есть замкнутое дискретное подмножество, содержащее все критические значения отображения $\pi$, и $B = \pi^{-1}(A)$. Пусть $f$ — голоморфная (или мероморфная) функция на $Y \setminus B$, и пусть $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{O}(X \setminus A)$ (соотв. $\in \mathcal{M}(X \setminus A)$) — элементарные симметрические функции от $f$. Тогда $f$ допускает голоморфное (мероморфное) продолжение на всю $Y$ в том и только том случае, когда все $c_\nu$ можно голоморфно (мероморфно) продолжить на $X$.*

На основании этого предложения в дальнейшем можно будет определить элементарные симметрические функции для $f \in \mathcal{M}(Y)$ также относительно разветвленного накрытия.

*Доказательство.* Пусть $a \in A$ и $b_1, \ldots, b_m$ — прообразы $a$. Пусть $(U, z)$ — относительно компактная координатная окрестность $a$ с $z(a) = 0$ и $U \cap A = \{a\}$. Тогда $V := \pi^{-1}(U)$ — относительно компактная окрестность каждой точки $b_\mu$.

1. Мы обсудим сначала случай $f \in \mathcal{O}(Y \setminus B)$.

(a) Пусть $f$ голоморфно продолжается во все точки $b_\mu$. Тогда $f$ ограничена на $V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$. Отсюда следует, что

все $c_\nu$ ограничены в $U \setminus \{a\}$. По теореме Римана об устранимой особенности они голоморфно продолжаются в точку $a$.

(b) Предположим, что все $c_\nu$ допускают голоморфное продолжение в $a$. Тогда все $c_\nu$ ограничены в $U \setminus \{a\}$, откуда следует, что $f$ ограничена в $V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$, так как для $y \in V \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ и $x = \pi(y)$ имеем

$$f(y)^n + c_1(x) f(y)^{n-1} + \ldots + c_n(x) = 0.$$

Опять из теоремы Римана об устранимой особенности следует, что $f$ голоморфно продолжается в каждую точку $b_\mu$.

2. Пусть теперь $f \in \mathcal{M}(Y \setminus B)$.

(a) Пусть $f$ мероморфно продолжается во все точки $b_\mu$. Функция $\varphi := \pi^* z \in \mathcal{O}(V)$ обращается в нуль во всех точках $b_\mu$. Поэтому для достаточно большого $k$ функция $\varphi^k f$ голоморфно продолжается во все точки $b_\mu$. Элементарные симметрические функции от $\varphi^k f$ суть $z^{k\nu} c_\nu$, которые по первой части доказательства голоморфно продолжаются в точку $a$. Таким образом, все $c_\nu$ мероморфно продолжаются в $a$.

(b) Пусть все $c_\nu$ можно мероморфно продолжить в $a$. Тогда, в тех же обозначениях, имеем: если $k$ достаточно велико, то все $z^{k\nu} c_\nu$ голоморфно продолжаются в $a$ и, значит, $\varphi^k f$ голоморфно продолжается во все точки $b_\mu$. Отсюда следует, что $f$ мероморфно продолжается во все точки $b_\mu$, ч. т. д.

Для дальнейших целей отметим еще, что при доказательстве этого предложения не использовалась связность $Y$. Предложение справедливо также для случая, когда $Y$ есть дизъюнктное объединение конечного числа римановых поверхностей.

**8.3. Предложение.** *Пусть $X, Y$ — римановы поверхности и $\pi: Y \longrightarrow X$ — собственное голоморфное $n$-листное накрывающее отображение. Если $f \in \mathcal{M}(Y)$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{M}(X)$ — элементарные симметрические функции от $f$, то*

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \ldots + (\pi^* c_{n-1}) f + \pi^* c_n = 0.$$

*Мономорфизм $\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ является алгебраическим расширением полей степени $\leqslant n$.*

*Дополнение.* Если существует $f \in \mathcal{M}(Y)$ и точка $x \in X$ с прообразами $y_1, \ldots, y_n \in Y$, такая, что значения $f(y_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$, попарно различны, то расширение полей $\pi^*: \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$ имеет степень $n$.

*Замечание.* Позже мы увидим, что условие дополнения всегда выполняется, — см. (14.13) и (26.6).

*Доказательство*. Справедливость равенства

$$f^n + \sum_{\nu=1}^{n} (\pi^* c_\nu) f^{n-\nu} = 0$$

следует прямо из определения элементарных симметрических функций от $f$.

Пусть $L := \mathcal{M}(Y)$ и $K := \pi^* \mathcal{M}(X) \subset L$. Тогда каждая $f \in L$ является алгебраической над $K$, а соответствующий минимальный многочлен для $f$ над $K$ имеет степень $\leqslant n$. Пусть $f_0 \in L$ есть элемент, для которого степень $n_0$ минимального многочлена максимальна в $L$.

*Утверждение*: $L = K(f_0)$.

Для доказательства утверждения возьмем произвольный элемент $f \in L$ и рассмотрим поле $K(f_0, f)$. По теореме о примитивном элементе, существует $g \in L$ с $K(f_0, f) = K(g)$. По определению $n_0$ имеем $\dim_K K(g) \leqslant n_0$. С другой стороны,

$$\dim_K K(f_0, f) \geqslant \dim_K K(f_0) \geqslant n_0.$$

Отсюда следует, что $K(f_0) = K(f_0, f)$ и, значит, $f \in K(f_0)$.

*Доказательство дополнения*. Если бы степень минимального многочлена для $f$ над $K$ равнялась $m < n$, то $f$ могла бы принимать над каждой точкой $x \in X$ не более чем $m$ различных значений.

**8.4. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $A \subset X$ — замкнутое дискретное подмножество и $X' = X \setminus A$. Пусть $Y'$ — другая риманова поверхность и $\pi' \colon Y' \to X'$ — собственное неразветвленное голоморфное накрытие. Тогда $\pi'$ продолжается до собственного накрытия над $X$, т. е. существует риманова поверхность $Y$, собственное голоморфное отображение $\pi \colon Y \to X$ и послойное биголоморфное отображение*

$$\varphi \colon Y \setminus \pi^{-1}(A) \to Y'.$$

*Доказательство*. Для каждой $a \in A$ выберем координатную окрестность $(U_a, z_a)$ в $X$ со следующими свойствами: $z_a(a) = 0$, $z_a(U_a)$ есть единичный круг в $\mathbb{C}$ и $U_a \cap U_{a'} = \varnothing$ для $a \neq a' \in A$. Пусть $U_a^* = U_a \setminus \{a\}$. Так как $\pi' \colon Y' \to X'$ собственное, то $\pi'^{-1}(U_a^*)$ распадается на конечное число связных компонент $V_{a\nu}^*$, $\nu = 1, \ldots, n(a)$. Для каждого $\nu$ отображение $\pi' \colon V_{a\nu}^* \to U_a^*$ есть собственное неразветвленное накрытие. Пусть число его листов равно $k_{a\nu}$. По предложению 5.10, имеются биголоморфные отображения $\zeta_{a\nu} \colon V_{a\nu}^* \to E^*$ множеств $V_{a\nu}^*$ на проколотый единичный круг $E^* = E \setminus \{0\}$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_{a\nu}^* & \xrightarrow{\zeta_{a\nu}} & E^* \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{a\nu}} \\ U_a^* & \xrightarrow{z_a} & E^* \end{array}$$

где $\pi_{a\nu}(\zeta) = \zeta^{k_{a\nu}}$, коммутативна.

Теперь мы выберем «идеальные точки» $p_{a\nu}$, $a \in A$, $\nu = 1, \ldots$ $\ldots, n(a)$, т. е. попарно различные элементы некоторого не пересекающегося с $Y'$ множества. Тогда на

$$Y := Y' \cup \{p_{a\nu}\colon\ a \in A,\ \nu = 1,\ \ldots,\ n(a)\}$$

имеется ровно одна топология со следующим свойством: если $W_i$, $i \in I$, — базис окрестностей точки $a$, то

$$\{p_{a\nu}\} \cup (\pi'^{-1}(W_i) \cap V^*_{a\nu}), \quad i \in I,$$

есть базис окрестностей для $p_{a\nu}$, а на $Y'$ индуцируется уже заданная топология. Благодаря этому $Y$ становится хаусдорфовым пространством. Определим $\pi\colon\ Y \longrightarrow X$, полагая $\pi(y) = \pi'(y)$ для $y \in Y'$ и $\pi(p_{a\nu}) = a$. Тогда, как легко проверить, $\pi$ есть собственное отображение.

Чтобы превратить $Y$ в риманову поверхность, мы добавим к картам комплексной структуры на $Y'$ еще следующие карты: пусть $V_{a\nu} = V^*_{a\nu} \cup \{p_{a\nu}\}$ и

$$\zeta_{a\nu}\colon\ V_{a\nu} \longrightarrow E$$

есть продолжение определенного выше отображения $\zeta_{a\nu}\colon V^*_{a\nu} \longrightarrow E^*$, задаваемое условием $\zeta_{a\nu}(p_{a\nu}) := 0$. Так как исходное отображение биголоморфно относительно комплексной структуры на $Y'$, то новые карты $\zeta_{a\nu}\colon\ V_{a\nu} \longrightarrow E$ биголоморфно согласованы с картами комплексной структуры на $Y'$. Отображение $\pi\colon\ Y \longrightarrow X$ становится голоморфным. Так как по построению $Y \setminus \pi^{-1}(A) = Y'$, то в качестве $\varphi\colon\ Y \setminus \pi^{-1}(A) \longrightarrow Y'$ мы можем взять тождественное отображение. Тем самым существование продолжения для накрытия $\pi'\colon\ Y' \longrightarrow X'$ доказано.

Следующее предложение показывает, что продолжение накрытия, существование которого только что было доказано, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

**8.5. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$, $Z$ — римановы поверхности и $\pi\colon\ Y \longrightarrow X$, $\tau\colon\ Z \longrightarrow X$ — собственные голоморфные накрытия. Пусть $A \subset X$ есть замкнутое дискретное множество точек, $X' := X \setminus A$, $Y' := \pi^{-1}(X')$ и $Z' := \tau^{-1}(X')$. Тогда всякое послойное биголоморфное отображение $\sigma'\colon\ Y' \longrightarrow Z'$ можно продолжить до послойного биголоморфного отображения $\sigma\colon\ Y \longrightarrow Z$. В частности, всякое накрывающее преобразование $\sigma' \in \operatorname{Deck}(Y'/X')$ можно продолжить до накрывающего преобразования $\sigma \in \operatorname{Deck}(Y/X)$.*

*Доказательство.* Пусть $a \in A$ и $(U, z)$ — координатная окрестность $a$, такая, что $z(a) = 0$ и $z(U)$ — единичный круг. Пусть $U^* = U \setminus \{a\}$. Мы можем к тому же предполагать, что $U$ настолько мала, что $\pi$ и $\tau$ над $U^*$ не разветвлены. Пусть

$V_1, \ldots, V_n$ и $W_1, \ldots, W_m$ суть связные компоненты $\pi^{-1}(U)$ и $\tau^{-1}(U)$ соответственно. Тогда $V_\nu^* := V_\nu \setminus \pi^{-1}(a)$, соотв. $W_\mu^* := W_\mu \setminus \tau^{-1}(a)$, суть связные компоненты $\pi^{-1}(U^*)$, соотв. $\tau^{-1}(U^*)$.

Так как $\sigma'\colon \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ биголоморфно, то $n = m$ и можно так перенумеровать компоненты, что $\sigma'(V_\nu^*) = W_\nu^*$. Так как $\pi\colon V_\nu^* \to U^*$ — конечнолистное неразветвленное накрытие, то, по предложению 5.11, $U_\nu \cap \pi^{-1}(a)$ состоит ровно из одной точки $b_\nu$; таким же образом, $W_\nu \cap \tau^{-1}(a)$ состоит из одной-единственной точки $c_\nu$. Поэтому $\sigma'\colon \pi^{-1}(U^*) \to \tau^{-1}(U^*)$ можно продолжить до биективного отображения $\pi^{-1}(U) \to \tau^{-1}(U)$, причем $b_\nu$ соответствует точка $c_\nu$. Так как $\pi\colon V_\nu \to U$ и $\tau\colon W_\nu \to U$ собственные, то это продолжение является гомеоморфизмом, а по теореме Римана об устранимой особенности оно даже биголоморфно. (Теорема об устранимой особенности применима, так как $V_\nu$ и $W_\nu$, по предложению 5.11, изоморфны кругу.) Применим это построение к каждой исключительной точке $a \in A$ и тогда получим искомое продолжение $\sigma\colon Y \to Z$.

Благодаря предложению 8.5 следующее определение имеет смысл (см. определение 5.5).

**8.6. Определение.** Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности и $\pi\colon Y \to X$ — собственное голоморфное накрытие. Пусть $A \subset X$ есть множество критических значений для $\pi$, $X' := X \setminus A$ и $Y' := \pi^{-1}(X')$. Тогда $Y \to X$ называется *накрытием Галуа*, если $Y' \to X'$ есть накрытие Галуа.

**8.7. Лемма.** *Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — голоморфные функции в круге*

$$E(R) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\} \qquad (R > 0).$$

*Пусть $w_0 \in \mathbb{C}$ есть простой нуль многочлена*

$$T^n + c_1(0)T^{n-1} + \ldots + c_n(0) \in \mathbb{C}[T].$$

*Тогда существует $r$, $0 < r \leqslant R$, и голоморфная в круге $E(r)$ функция $\varphi$, такая, что $\varphi(0) = w_0$ и*

$$\varphi^n + c_1\varphi^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \text{ на } E(r).$$

*Доказательство.* Для $z \in E(R)$ и $w \in \mathbb{C}$ пусть

$$F(z, w) = w^n + c_1(z)w^{n-1} + \ldots + c_n(z).$$

Существует $\varepsilon > 0$, такое, что функция $w \mapsto F(0, w)$ в круге $\{w \in \mathbb{C}\colon |w - w_0| < \varepsilon\}$ имеет единственный нуль $w_0$. Ввиду непрерывности $F$, теперь найдется $r$, $0 < r \leqslant R$, такое, что функция $F$ на множестве

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2\colon |z| < r,\ |w - w_0| = \varepsilon\}$$

не имеет нулей. Для фиксированного $z \in E(r)$ величина

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-w_0|=\varepsilon} \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw \qquad \left(F_w := \frac{\partial F}{\partial w}\right)$$

дает число нулей функции $w \mapsto F(z, w)$ в круге с радиусом $\varepsilon$ и центром $w_0$. Так как $n(0) = 1$ и $n$ непрерывно зависит от $z$, то $n(z) = 1$ для всех $z \in E(r)$. По теореме о вычетах, нуль функции $w \mapsto F(z, w)$ в круге $|w - w_0| < \varepsilon$ задается формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-w_0|=\varepsilon} w \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw.$$

Так как подынтегральное выражение голоморфно зависит от $z$, то функция $z \mapsto \varphi(z)$ в $E(r)$ голоморфна и $F(z, \varphi(z)) = 0$ для всех $z \in E(r)$, ч. т. д.

**8.8. Следствие.** *Пусть $\mathcal{O}_x$ есть кольцо ростков голоморфных функций в точке $x$ на римановой поверхности и*

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathcal{O}_x[T].$$

*Пусть многочлен*

$$p(T) := T^n + c_1(x) T^{n-1} + \ldots + c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

*имеет $n$ попарно различных нулей $w_1, \ldots, w_n$. Тогда существуют элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{O}_x$, такие, что $\varphi_\nu(x) = w_\nu$ и*

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^{n} (T - \varphi_\nu).$$

**8.9. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и*

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \ldots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

*— неприводимый многочлен степени $n$. Тогда существует риманова поверхность $Y$, собственное голоморфное $n$-листное накрытие $\pi$: $Y \to X$ и мероморфная функция $F \in \mathcal{M}(Y)$ с $(\pi^* P)(F) = 0$. Тройка $(Y, \pi, F)$ определена однозначно в следующем смысле: если $(Z, \tau, G)$ удовлетворяет этим условиям, то существует ровно одно послойное биголоморфное отображение $\sigma$: $Z \to Y$ с $G = \sigma^* F$.*

Для краткости мы называем тройку $(Y, \pi, F)$ *алгебраической функцией*, определяемой многочленом $P(T)$.

*Замечание.* Классический случай получается, когда $X = \mathbb{P}_1$ есть риманова числовая сфера. Тогда, согласно (2.9), коэффициенты многочлена $P(T)$ являются рациональными функциями одного переменного. Так как $\mathbb{P}_1$ — компакт и отображение $\pi$: $Y \to \mathbb{P}_1$ собственное, то поверхность $Y$ тоже компактна.

*Доказательство.* Пусть $\Delta \in \mathcal{M}(X)$ есть дискриминант многочлена $P(T)$ ($\Delta$ является известным многочленом от коэффициентов $P$). Дискриминант не может равняться нулю тождественно, так как в противном случае $P$ был бы приводимым. Существует замкнутое дискретное множество точек $A \subset X$, такое, что в каждой точке $x \in X' := X \setminus A$ все функции $c_1, \ldots, c_n$ голоморфны и $\Delta(x) \neq 0$. Тогда для каждой $x \in X'$ многочлен

$$p_x(T) := T^n + c_1(x) T^{n-1} + \ldots + c_n(x) \in \mathbb{C}[T]$$

имеет $n$ попарно различных нулей. Теперь воспользуемся накрытием $|\mathcal{O}| \longrightarrow X$, соответствующим пучку $\mathcal{O}$ согласно (6.7). Пусть $Y' \subset |\mathcal{O}|$ есть множество всех функциональных ростков $\varphi \in \mathcal{O}_x$, $x \in X'$, которые удовлетворяют уравнению $P(\varphi) = 0$, и $\pi'\colon Y' \longrightarrow X'$ — каноническая проекция. Согласно следствию 8.8, для каждой точки $x \in X'$ найдутся открытая окрестность $U \subset X'$ и голоморфные функции $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U)$, такие, что

$$P(T) = \prod_{\nu=1}^{n} (T - f_\nu) \text{ над } U,$$

и, значит, $\pi'^{-1}(U) = \bigcup_{\nu=1}^{n} [U, f_\nu]$. Множества $[U, f_\nu]$ попарно не пересекаются и все $\pi'\colon [U, f_\nu] \longrightarrow U$ — гомеоморфизмы. Это показывает, что $Y' \longrightarrow X'$ есть безграничное неразветвленное накрытие. Связные компоненты $Y'$ суть римановы поверхности, которые также безграничны и не разветвлены над $X'$. Пусть $f\colon Y' \longrightarrow \mathbb{C}$ определяется условием $f(\varphi) := \varphi(\pi'(\varphi))$. Тогда $f$ голоморфна и, по построению,

$$f(y)^n + c_1(\pi'(y)) f(y)^{n-1} + \ldots + c_n(\pi'(y)) = 0$$

для всех $y \in Y'$. По предложению 8.4, накрытие $\pi'\colon Y' \longrightarrow X'$ можно продолжить до собственного голоморфного отображения $\pi\colon Y \longrightarrow X$. (Мы отождествляем $Y'$ с $\pi^{-1}(X')$.) По предложению 8.2, $f$ продолжается до мероморфной функции $F \in \mathcal{M}(Y)$, для которой

$$(\pi^* P)(F) = F^n + (\pi^* c_1) F^{n-1} + \ldots + \pi^* c_n = 0.$$

Покажем теперь, что $Y$ связно и, значит, $Y$ — риманова поверхность. Предположим, что это не так. Тогда $Y$ распадается на конечное число связных компонент $Y_1, \ldots, Y_k$ и $\pi\colon Y_i \longrightarrow X$ — собственные голоморфные $n_i$-листные накрытия, $\sum n_i = n$. Образуя элементарные симметрические функции от $F | Y_i$, мы получаем многочлены $P_i(T) \in \mathcal{M}(X)[T]$ степени $n_i$, такие, что

$$P(T) = P_1(T) P_2(T) \ldots P_k(T).$$

Но это противоречит неприводимости $P(T)$.

*Единственность.* Пусть $(Z, \tau, G)$ — другая алгебраическая функция, определяемая многочленом $P(T)$. Пусть $B \subset Z$ есть объединение полюсов $G$ и точек разветвления для $\tau$, и пусть $A' := \tau(B)$. Положим

$$X'' := X' \setminus A', \quad Y'' := \pi^{-1}(X''), \quad Z'' := \tau^{-1}(X'')$$

и определим послойное отображение $\sigma''\colon Z'' \longrightarrow Y''$ следующим образом. Пусть $z \in Z''$, $\tau(z) = x$ и $\varphi \in \mathcal{O}_x$ — функциональный росток, $\varphi := \tau_* G_z$. Имеем $P(\varphi) = 0$. По построению $Y'$, $\varphi$ есть точка в $Y'$, лежащая над $x$, и, значит, $\varphi \in Y''$. Мы полагаем $\sigma''(z) = \varphi$. Непосредственно из определения следует, что $\sigma''$ непрерывно. Так как отображение $\sigma''$ послойное, то отсюда следует, что $\sigma''$ голоморфно. Кроме того, $\sigma''$ собственное, так как $\pi\colon Y'' \longrightarrow X''$ непрерывное и $\tau\colon Z'' \longrightarrow X''$ собственное. Следовательно, $\sigma''$ сюръективно (лемма 4.21). Так как $Y'' \longrightarrow X''$ и $Z'' \longrightarrow X''$ имеют одинаковое число листов, то $\sigma''\colon Z'' \longrightarrow Y''$ биголоморфно. Далее, из определения $\sigma''$ следует, что $G \mid Z'' = (\sigma'')^* (F \mid Y'')$. По предложению 8.5, $\sigma''$ продолжается до послойного биголоморфного отображения $\sigma\colon Z \longrightarrow Y$, для которого тогда $G = \sigma^* F$. Отображение $\sigma$ однозначно определяется свойством $G = \sigma^* F$. В противном случае существовало бы отличное от тождественного накрывающее преобразование $\alpha\colon Y \longrightarrow Y$ с $\alpha^* F = F$. Но это невозможно, так как на слое $\pi^{-1}(x)$ над каждой точкой $x \in X'$ функция $F$ принимает попарно различные значения.

**8.10. Пример.** Пусть $f(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_n)$ — многочлен с попарно различными нулями $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Мы рассматриваем $f$ как мероморфную функцию на римановой числовой сфере $\mathbb{P}_1$. Многочлен $P(T) = T^2 - f$ неприводим над $\mathcal{M}(\mathbb{P}_1)$ и определяет алгебраическую функцию, которая обычно обозначается $\sqrt{f(z)}$. Ее риманову поверхность $\pi\colon Y \longrightarrow \mathbb{P}_1$, согласно приведенной выше конструкции, можно описать следующим образом. Пусть

$$A := \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{\infty\},$$

$X' := \mathbb{P}_1 \setminus A$ и $Y' := \pi^{-1}(X')$. Тогда $\pi\colon Y' \longrightarrow X'$ есть безграничное и неразветвленное двулистное накрытие. Из этого следует, что всякий функциональный росток $\varphi \in \mathcal{O}_x$, $x \in X'$, с $\varphi^2 = f$ можно аналитически продолжить вдоль любой кривой, лежащей в $X'$. Рассмотрим теперь накрытие над окрестностью исключительной точки.

(a) Для $j \in \{1, \ldots, n\}$ пусть $r_j > 0$ настолько мало, что в круге

$$U_j := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a_j| < r_j\}$$

нет других точек множества $A$. Функция $g(z) = \prod_{k \neq j} (z - a_k)$

в $U_j$ не имеет нулей и $U_j$ односвязна, поэтому существует голоморфная функция $h\colon U_j \to \mathbb{C}$ с $h^2 = g$. Таким образом, в $U_j$ имеем

$$f(z) = (z - a_j)\, h(z)^2.$$

Пусть $0 < \rho < r_j$, $\theta \in \mathbb{R}$ и $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$. По лемме 8.7, имеется росток $\varphi_\zeta \in \mathcal{O}_\zeta$ с $\varphi_\zeta^2 = f$ и

$$\varphi_\zeta(\zeta) = \sqrt{\rho}\, e^{i\theta/2} h(\zeta).$$

Следовательно, аналитически продолжая этот росток вдоль замкнутой кривой $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, мы получаем исходный элемент со знаком минус. Пусть $U_j^* := U_j \setminus \{a_j\}$ и $V_j^* := \pi^{-1}(U_j^*)$. Тогда $\pi\colon V_j^* \to U_j^*$ — связное двулистное накрытие, как в предложении 5.10 (ii) с $k = 2$, так как в противном случае $\pi\colon V_j^* \to U_j^*$ распадалось бы на два однолистных накрытия и аналитическое продолжение вдоль кривой $\zeta = a_j + \rho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, привело бы к тому же функциональному ростку. Поэтому риманова поверхность $Y$ имеет ровно одну точку над точкой $a_j$.

(b) Пусть $r > \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$ и $U^* := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > r\}$. Тогда $U := U^* \cup \{\infty\}$ есть изоморфная кругу окрестность $\infty$, которая не содержит других точек множества $A$. В $U$ функцию $f$ можно представить в виде $f = z^n F$, где $F$ — голоморфная функция без нулей в $U$. Мы различаем два случая.

(i) *$n$ нечетно.* Тогда существует мероморфная функция $h$ в $U$ с $f(z) = z h(z)^2$.

(ii) *$n$ четно.* Тогда существует мероморфная функция $h$ в $U$ с $f(z) = h(z)^2$.

Пусть $V^* := \pi^{-1}(U^*)$. Как и выше, показывается, что в случае (i) $\pi\colon V^* \to U^*$ есть связное двулистное накрытие и что $Y$ имеет над $\infty$ ровно одну точку. Напротив, в случае (ii) $\pi\colon V^* \to U^*$ распадается на два однолистных накрытия и, значит, $Y$ для четных $n$ имеет над $\infty$ две точки.

**8.11.** Если $X$, $Y$ — римановы поверхности и $\pi\colon Y \to X$ — голоморфное накрывающее отображение, то $\operatorname{Deck}(Y/X)$ имеет представление в группе автоморфизмов поля $\mathcal{M}(Y)$, которое определяется следующим образом. Для $\sigma \in \operatorname{Deck}(Y/X)$ пусть $\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$. Ясно, что соответствие $f \mapsto \sigma f$ является автоморфизмом $\mathcal{M}(Y)$. Отображение

$$\operatorname{Deck}(Y/X) \to \operatorname{Aut}(\mathcal{M}(Y))$$

есть гомоморфизм групп. В самом деле, пусть $\sigma, \tau \in \operatorname{Deck}(Y/X)$. Тогда для каждой $f \in \mathcal{M}(Y)$

$$(\sigma\tau) f = f \circ (\sigma\tau)^{-1} = f \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} = \sigma(f \circ \tau^{-1}) = \sigma(\tau f).$$

Всякий такой автоморфизм $f \mapsto \sigma f$, очевидно, оставляет инвариантными функции подполя $\pi^*\mathcal{M}(X) \subset \mathcal{M}(Y)$ и, таким образом, является элементом группы Галуа $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}(Y)/\pi^*\mathcal{M}(X))$.

**8.12. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $K := \mathcal{M}(X)$ — поле мероморфных функций на $X$ и $P(T) \in K[T]$ — неприводимый многочлен степени $n$ со старшим коэффициентом единица. Пусть $(Y, \pi, F)$ есть алгебраическая функция, определяемая $P(T)$, и $L = \mathcal{M}(Y)$. В силу мономорфизма $\pi^*: K \to L$, $K$ рассматривается как подполе в $L$. Тогда $L:K$ есть расширение полей степени $n$ и $L \cong K[T]/(P(T))$. Всякое накрывающее преобразование $\sigma: Y \to Y$ накрытия $Y$ над $X$ индуцирует автоморфизм $f \mapsto \sigma f := f \circ \sigma^{-1}$ поля $L$, сохраняющий $K$; определяемое так отображение*

$$\mathrm{Deck}(Y/X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(L/K)$$

*является изоморфизмом групп. Накрытие $Y \to X$ является накрытием Галуа тогда и только тогда, когда расширение полей $L:K$ есть расширение Галуа.*

*Доказательство.* То что $L:K$ есть расширение полей степени $n$, следует из дополнения к предложению 8.3. Так как $P(F) = 0$, то имеет место гомоморфизм $K[T]/(P(T)) \to L$; так как оба поля имеют степень $n$ над $K$, то это изоморфизм.

Отображение $\mathrm{Deck}(Y/X) \to \mathrm{Aut}(L/K)$ инъективно, так как для всякого нетождественного накрывающего преобразования $\sigma$ имеем $\sigma F \neq F$. Это отображение также сюръективно. В самом деле, пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(L/K)$. Тогда $(Y, \pi, \alpha F)$ — тоже алгебраическая функция, определяемая многочленом $P(T)$; поэтому, согласно утверждению о единственности в предложении 8.9, существует накрывающее преобразование $\tau \in \mathrm{Deck}(Y/X)$ с $\alpha F = \tau^* F$. А тогда для $\sigma := \tau^{-1}$ имеем

$$\sigma F = F \circ \sigma^{-1} = F \circ \tau = \tau^* F = \alpha F.$$

Так как $L$ получается из $F$ над $K$, то автоморфизм $f \mapsto \sigma f$ поля $L$ совпадает с $\alpha$.

Последнее высказывание предложения следует из того, что $Y$ над $X$, соотв. $L$ над $K$, суть расширения Галуа тогда и только тогда, когда $\mathrm{Deck}(Y/X)$, соотв. $\mathrm{Aut}(L/K)$, состоит из $n$ элементов.

## § 9. Дифференциальные формы

В этом параграфе мы вводим понятие дифференциальной формы на римановой поверхности. При этом мы рассматриваем не только голоморфные и мероморфные дифференциальные фор-

мы, но также и дифференциальные формы, которые лишь дифференцируемы в вещественном смысле.

**9.1.** Пусть $U$ — открытое подмножество плоскости $\mathbb{C}$, которая отождествляется с $\mathbb{R}^2$. Пусть $x$, $y$ — канонические вещественные координатные функции и $z = x + iy$. Через $\mathcal{E}(U)$ мы обозначаем $\mathbb{C}$-алгебру всех функций $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, бесконечно дифференцируемых относительно вещественных координат $x$, $y$. Наряду с производными $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ мы рассматриваем также дифференциальные операторы «исчисления Виртингера»

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Как известно, дифференциальные уравнения Коши — Римана как раз означают, что векторное пространство $\mathcal{O}(U)$ голоморфных функций на $U$ является ядром отображения $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\colon\ \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$.

**9.2.** При помощи комплексных карт понятие дифференцируемых функций можно перенести на римановы поверхности $X$. Для открытого подмножества $Y \subset X$ пусть $\mathcal{E}(Y)$ состоит из всех функций $f\colon Y \longrightarrow \mathbb{C}$ со следующим свойством: для любой карты $z\colon U \longrightarrow V \subset \mathbb{C}$ на $X$ с $U \subset Y$ найдется функция $\tilde{f} \in \mathcal{E}(V)$, такая, что $f|U = \tilde{f} \circ z$. (Функция $\tilde{f}$ однозначно определяется функцией $f$, так как $\tilde{f} = f \circ \psi$, где $\psi\colon V \longrightarrow U$ — обратное отображение к $z\colon U \longrightarrow V$.)

Вместе с естественными отображениями сужения таким образом получается пучок $\mathcal{E}$ дифференцируемых функций на римановой поверхности $X$. (Дифференцируемость всегда в дальнейшем означает бесконечную дифференцируемость.)

Если $(U, z)$, $z = x + iy$, — координатная окрестность на $X$, то естественным образом можно определить дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\colon\ \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U).$$

Пусть точка $a \in X$. Тогда слой $\mathcal{E}_a$ пучка $\mathcal{E}$ состоит из всех ростков дифференцируемых функций в точке $a$. Мы обозначаем через $\mathfrak{m}_a \subset \mathcal{E}_a$ векторное подпространство всех функциональных ростков, которые равны нулю в $a$, а через $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a$ — векторное подпространство тех функциональных ростков, которые обращаются в точке $a$ в нуль второго порядка. Говорят, что росток $\varphi \in \mathfrak{m}_a$ имеет нуль второго порядка, если он представляется функцией $f$, которая относительно координатной окрест-

ности $(U,\ z=x+iy)$ точки $a$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial f}{\partial y}(a)=0.$$

Это определение не зависит от выбора локальной координаты $z$.

**9.3. Определение.** Векторное факторпространство

$$T_a^{(1)}:=\mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2$$

называется *кокасательным пространством* поверхности $X$ в точке $a$. Если $U$ — открытая окрестность $a$ и $f\in\mathscr{E}(U)$, то *дифференциалом* $d_af\in T_a^{(1)}$ функции $f$ в точке $a$ называется элемент

$$d_af:=(f-f(a))\bmod\mathfrak{m}_a^2.$$

При этом учитывается, что функция $f-f(a)$ в точке $a$ равна нулю, и, значит, она представляет некоторый элемент из $\mathfrak{m}_a$. Его класс вычетов по модулю $\mathfrak{m}_a^2$ и есть, по определению, $d_af$.

**9.4. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $a\in X$ и $(U,\ z)$ — координатная окрестность $a$. Пусть $z=x+iy$ есть разложение $z$ на вещественную и мнимую части. Тогда элементы $d_ax$ и $d_ay$ образуют базис в кокасательном пространстве $T_a^{(1)}$. Также и $(d_az,\ d_a\bar z)$ есть базис в $T_a^{(1)}$. Если $f$ — дифференцируемая функция в окрестности $a$, то*

$$d_af=\frac{\partial f}{\partial x}(a)\,d_ax+\frac{\partial f}{\partial y}(a)\,d_ay=\frac{\partial f}{\partial z}(a)\,d_az+\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a)\,d_a\bar z\ .$$

*Доказательство.* (a) Покажем сначала, что $(d_ax,\ d_ay)$ порождают $T_a^{(1)}$. Пусть $t\in T_a^{(1)}$ и $\varphi\in\mathfrak{m}_a$ — представитель $t$. Разложение $\varphi$ по формуле Тейлора в точке $a$ дает

$$\varphi=c_1(x-x(a))+c_2(y-y(a))+\psi,$$

где $c_1,\ c_2\in\mathbb{C}$ и $\psi\in\mathfrak{m}_a^2$. Переходя к классам вычетов по модулю $\mathfrak{m}_a^2$, получаем

$$t=c_1d_ax+c_2d_ay.$$

(b) $d_ax$ и $d_ay$ линейно независимы. В самом деле, из $c_1d_ax+c_2d_ay=0$ следует, что

$$c_1(x-x(a))+c_2(y-y(a))\in\mathfrak{m}_a^2.$$

Беря частные производные этого выражения по $x$ и $y$, получаем $c_1=c_2=0$.

(c) Пусть $f$ дифференцируема в окрестности $a$. Тогда

$$f-f(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-x(a))+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-y(a))+g,$$

где $g$ в точке $a$ имеет нуль второго порядка. Отсюда следует, что

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, d_a y.$$

Вполне аналогично доказываются соответствующие утверждения для $(d_a z,\ d_a \bar{z})$.

**9.5. Кокасательные векторы типа (1, 0) и (0, 1).** Пусть $(U,\ z)$ и $(U',\ z')$ — две координатные окрестности точки $a \in X$. Тогда

$$\frac{\partial z'}{\partial z}(a) =: c \in \mathbb{C}^*, \qquad \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}(a) = \bar{c}$$

и

$$\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z}(a) = 0.$$

Отсюда $d_a z' = c\, d_a z$, $d_a \bar{z}' = \bar{c}\, d_a \bar{z}$. Поэтому одномерные векторные подпространства в $T_a^{(1)}$, натянутые на $d_a z$ и на $d_a \bar{z}$, не зависят от выбора координатной окрестности $(U,\ z)$ точки $a$. Мы введем следующие обозначения:

$$T_a^{1,0} := \mathbb{C}\, d_a z, \qquad T_a^{0,1} := \mathbb{C}\, d_a \bar{z}.$$

По построению, $T_a^{(1)} = T_a^{1,0} \bigoplus T_a^{0,1}$. Элементы пространства $T_a^{1,0}$, соотв. $T_a^{0,1}$, называются кокасательными векторами типа $(1,0)$, соотв. $(0,\ 1)$.

Если $f$ дифференцируема в окрестности $a$, то мы определяем $\partial_a f$ и $\bar{\partial}_a f$ условиями

$$d_a f = \partial_a f + \bar{\partial}_a f, \quad \partial_a f \in T_a^{1,0}, \quad \bar{\partial}_a f \in T_a^{0,1}.$$

Имеем

$$\partial_a f = \frac{\partial f}{\partial z}(a)\, d_a z, \quad \bar{\partial}_a f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\, d_a \bar{z}.$$

**9.6. Определение.** Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$. *Дифференциальной формой первого порядка* на $Y$ называется отображение

$$\omega\colon\ Y \longrightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{(1)},$$

такое, что $\omega(a) \in T_a^{(1)}$ для всех $a \in Y$. Если $\omega(a) \in T_a^{1,0}$ (соотв. $\omega(a) \in T_a^{0,1}$) для всех $a \in Y$, то $\omega$ называется формой типа $(1,0)$ (соотв. типа $(0,\ 1)$).

**9.7. Примеры.** (a) Пусть $f \in \mathcal{E}(Y)$. Тогда отображения $df$, $\partial f$, $\bar{\partial} f$, которые определяются условиями

$$(df)(a) := d_a f, \quad (\partial f)(a) := \partial_a f, \quad (\bar{\partial} f)(a) := \bar{\partial}_a f$$

для $a \in Y$, являются дифференциальными формами первого порядка. Функция $f$ голоморфна тогда и только тогда, когда $\bar{\partial} f = 0$.

(b) Пусть $\omega$ есть дифференциальная форма первого порядка на $Y$ и функция $f: Y \to \mathbb{C}$. Тогда отображение $f\omega$, при котором $(f\omega)(a) := f(a)\,\omega(a)$, является дифференциальной формой первого порядка на $Y$.

*Замечание.* Если $(U, z)$ — комплексная карта, $z = x + iy$, то всякую дифференциальную форму первого порядка в $U$ можно записать в виде

$$\omega = f\,dx + g\,dy = \varphi\,dz + \psi\,d\bar{z}$$

с функциями $f$, $g$, $\varphi$, $\psi$: $U \to \mathbb{C}$, которые, вообще говоря, не обязательно непрерывны.

**9.8. Определение.** Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$. Дифференциальная форма первого порядка $\omega$ называется *дифференцируемой*, соотв. *голоморфной*, в $Y$, когда относительно каждой комплексной карты $(U, z)$ она представляется в виде

$$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z} \quad \text{в} \quad U \cap Y \quad \text{с} \quad f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y),$$

соответственно

$$\omega = f\,dz \quad \text{в} \quad U \cap Y \quad \text{с} \quad f \in \mathcal{O}(U \cap Y).$$

*Обозначения.* Для открытого подмножества $U$ римановой поверхности $X$ мы обозначаем через $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ векторное пространство дифференцируемых дифференциальных форм первого порядка на $U$, через $\mathcal{E}^{1,0}(U)$, соотв. $\mathcal{E}^{0,1}(U)$, — векторные подпространства в $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ дифференциальных форм типа (1, 0), соотв. (0, 1), и через $\Omega(U)$ — векторное пространство голоморфных дифференциальных форм на $U$. Вместе с естественными отображениями сужения $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{1,0}$, $\mathcal{E}^{0,1}$, $\Omega$ становятся пучками векторных пространств на $X$.

**9.9. Вычеты.** Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности, $a \in Y$ и $\omega$ — голоморфная в $Y \setminus \{a\}$ дифференциальная форма. Пусть $(U, z)$ есть координатная окрестность $a$ с $U \subset Y$ и $z(a) = 0$. Тогда $\omega$ в $U \setminus \{a\}$ представляется в виде $\omega = f\,dz$ с $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$. Пусть

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

есть разложение Лорана для $f$ в точке $a$ относительно координаты $z$. Если $c_n = 0$ для всех $n < 0$, то $\omega$ допускает голоморфное продолжение на все $Y$ — в таком случае говорят, что

$\omega$ имеет в точке $a$ устранимую особенность. Если существует $k < 0$, такое, что $c_k \neq 0$, а $c_n = 0$ для всех $n < k$, то $\omega$ имеет в $a$ *полюс* $k$-го порядка. Если имеется бесконечно много $n < 0$ с $c_n \neq 0$, то $\omega$ имеет в точке $a$ существенную особенность.

Коэффициет $c_{-1}$ называется *вычетом* формы $\omega$ в точке $a$ и обозначается символом $c_{-1} = \operatorname{Res}_a(\omega)$.

То что это определение имеет смысл, следует из такого утверждения:

**Лемма.** *Вычет не зависит от выбора карты* $(U, z)$.

*Доказательство.* Пусть $V$ — открытая окрестность $a$.

*Утверждение* (*a*). Если $g$ голоморфна в $V \setminus \{a\}$, то вычет формы $dg$ в точке $a$ равен нулю, независимо от карты.

Доказательство. Пусть $(U, z)$ — произвольная координатная окрестность $a$ с $z(a) = 0$ и

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

— разложение Лорана для $g$ в точке $a$. Тогда

$$dg = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n z^{n-1}\right) dz$$

и, таким образом, коэффициент при $z^{-1}\,dz$ есть нуль.

*Утверждение* (*b*). Если $\varphi$ — голоморфная в $V$ функция, которая имеет в точке $a$ нуль первого порядка, то $\operatorname{Res}_a(\varphi^{-1}\,d\varphi) = 1$, независимо от выбора карты.

Доказательство. Пусть $(U, z)$ — карта в $a$ с $z(a) = 0$. Тогда $\varphi = zh$, где $h$ голоморфна и не равна нулю в $a$. Отсюда следует, что $d\varphi = h\,dz + z\,dh$ и, далее,

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{h\,dz + z\,dh}{zh} = \frac{dz}{z} + \frac{dh}{h}.$$

Так как $h(a) \neq 0$, то дифференциальная форма $h^{-1}\,dh$ голоморфна в $a$ и, значит, имеет вычет нуль. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Res}_a\left(\frac{d\varphi}{\varphi}\right) = \operatorname{Res}_a\left(\frac{dz}{z}\right) = 1.$$

Из утверждений (a) и (b) теперь уже легко вывести лемму. Относительно карты $(U, z)$ с $z(a) = 0$ пусть $\omega = f\,dz$,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Положим

$$g := \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Тогда $\omega = dg + c_{-1} z^{-1} dz$. Согласно (a) и (b), $\mathrm{Res}_a(\omega) = c_{-1}$ независимо от карты.

**9.10. Мероморфные дифференциальные формы.** Мероморфная дифференциальная форма $\omega$ на открытом подмножестве $Y$ римановой поверхности $X$ — это такая голоморфная дифференциальная форма, определенная на открытом подмножестве $Y' \subset Y$, что

(i) $Y \setminus Y'$ состоит только из изолированных точек;

(ii) в каждой точке $a \in Y \setminus Y'$ форма $\omega$ имеет полюс.

Множество всех мероморфных на $Y$ дифференциальных форм мы обозначаем $\mathcal{M}^{(1)}(Y)$. С естественными линейными операциями и отображениями сужения таким образом получается пучок $\mathcal{M}^{(1)}$ векторных пространств на $X$.

Мероморфная дифференциальная форма на $X$ называется *абелевым дифференциалом* 1-го рода, когда она всюду голоморфна, 2-го рода, когда ее вычеты в каждом полюсе равны нулю, и 3-го рода в остальных случаях.

**9.11. Внешнее произведение.** Чтобы можно было ввести дифференциальные формы второго порядка, напомним сначала некоторые свойства внешних произведений векторных пространств на себя. Пусть $V$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$. Тогда $\bigwedge^2 V$ — тоже $\mathbb{C}$-векторное пространство; его элементами являются конечные суммы элементов вида $v_1 \wedge v_2$ с $v_1, v_2 \in V$. Имеют место следующие правила:

$$(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3,$$
$$(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda (v_1 \wedge v_2),$$
$$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$$

для $v_1, v_2, v_3 \in V$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $V$, то элементы $e_i \wedge e_j$ с $i < j$ образуют базис в $\bigwedge^2 V$. Эти свойства полностью описывают $\bigwedge^2 V$.

Применим теперь это к кокасательному пространству $T_a^{(1)}$ римановой поверхности $X$ в точке $a$ и положим

$$T_a^{(2)} := \bigwedge^2 T_a^{(1)}.$$

Пусть $(U, z)$ — координатная окрестность $a$ и $z = x + iy$. Тогда, как только что говорилось, $d_a x \wedge d_a y$ есть базис в $T_a^{(2)}$; другим базисом является $d_a z \wedge d_a \bar{z} = -2i\, d_a x \wedge d_a y$. Таким образом, размерность $T_a^{(2)}$ равна единице.

**9.12. Определение.** Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$. *Дифференциальной формой второго порядка* на $Y$ называется отображение

$$\omega: Y \longrightarrow \bigcup_{a \in Y} T_a^{(2)},$$

такое, что $\omega(a) \in T_a^{(2)}$ для всех $a \in Y$. Дифференциальная форма $\omega$ называется дифференцируемой в $Y$, когда относительно любой комплексной карты $(U, z)$ на $X$ ее можно записать в виде

$$\omega = f\, dz \wedge d\bar{z} \quad \text{с} \quad f \in \mathcal{E}(U \cap Y).$$

Здесь $\omega = f\, dz \wedge d\bar{z}$ означает, что $\omega(a) = f(a)\, d_a z \wedge d_a \bar{z}$ для всех $a \in U \cap Y$.

Мы обозначаем через $\mathcal{E}^{(2)}(Y)$ векторное пространство всех дифференцируемых дифференциальных форм второго порядка на $Y$.

*Примеры.* Если $\omega_1$, $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ — дифференциальные формы первого порядка, то дифференциальная форма второго порядка $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$ определяется условием

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a)$$

для всех $a \in Y$. Из $f \in \mathcal{E}(Y)$ и $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$ получается новая дифференциальная форма второго порядка $f\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(Y)$: по определению $(f\omega)(a) = f(a)\,\omega(a)$ для всех $a \in Y$.

**9.13. Внешние дифференциалы дифференциальных форм.** Определим теперь операторы $d$, $\partial$, $\bar{\partial}$: $\mathcal{E}^{(1)}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}(U)$, где $U$ — открытое подмножество римановой поверхности, следующим образом. Локально дифференциальную форму первого порядка $\omega$ можно записать в виде конечной суммы

$$\omega = \sum f_k\, dg_k,$$

где $f_k$ и $g_k$ — дифференцируемые функции (например, $\omega = f_1\, dz + f_2\, d\bar{z}$ относительно локальной координаты $z$). Мы полагаем

$$d\omega := \sum df_k \wedge dg_k,$$
$$\partial\omega := \sum \partial f_k \wedge dg_k,$$
$$\bar{\partial}\omega := \sum \bar{\partial} f_k \wedge dg_k.$$

Надо еще показать, что это определение не зависит от представления $\omega = \sum f_k\, dg_k$. Мы покажем это на примере дифференциального оператора $d$.

Пусть $\omega = \sum f_k\, dg_k = \sum \tilde{f}_j\, d\tilde{g}_j$. Будем работать в координатной окрестности $(U, z)$, $z = x + iy$. Нам надо показать, что

$\sum df_k \wedge dg_k = \sum d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j$. Из формулы

$$dg_k = \frac{\partial g_k}{\partial x} dx + \frac{\partial g_k}{\partial y} dy$$

и соответствующей формулы для $d\tilde{g}_j$ имеем по условию

$$\sum f_k \frac{\partial g_k}{\partial x} = \sum \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x}, \qquad \sum f_k \frac{\partial g_k}{\partial y} = \sum \tilde{f}_j \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y}.$$

Дифференцируя эти соотношения по $x$ и по $y$ соответственно и вычитая, получаем

$$\sum \left( \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} - \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} \right) = \sum \left( \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial y} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x} \frac{\partial \tilde{g}_j}{\partial y} \right).$$

С другой стороны,

$$\sum df_k \wedge dg_k = \sum \left( \frac{\partial f_k}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial y} - \frac{\partial f_k}{\partial y} \frac{\partial g_k}{\partial x} \right) dx \wedge dy$$

и соответствующая формула имеет место для $\sum d\tilde{f}_j \wedge d\tilde{g}_j$. Из этого следует наше утверждение.

**9.14. Правила внешнего дифференцирования.** Пусть $U$ — открытое подмножество римановой поверхности, $f \in \mathcal{E}(U)$ и $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$. Тогда

(i) $ddf \quad = \partial \partial f = \bar{\partial} \bar{\partial} f = 0.$

(ii) $d\omega \quad = \partial \omega + \bar{\partial} \omega,$

(iii) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f\,d\omega$ и аналогичные правила для $\partial$ и $\bar{\partial}$.

Эти правила просто следуют из определений; например, $d\,df = d(1 \cdot df) = d1 \wedge df = 0.$

Из (i) и (ii) получаем

$$\partial \bar{\partial} f = -\bar{\partial} \partial f,$$

так как $0 = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial}) f = \partial \bar{\partial} f + \bar{\partial} \partial f.$

Относительно локальной карты $(U, z)$, $z = x + iy$, имеем

$$\partial \bar{\partial} f = \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy.$$

Поэтому дифференцируемая функция $f$ на открытом подмножестве римановой поверхности называется *гармонической*, если $\partial \bar{\partial} f = 0.$

**9.15. Определение.** Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности. Дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если существует $f \in \mathcal{E}(Y)$, такая, что $\omega = df$.

*Замечание.* Поскольку $d\,df = 0$, всякая точная дифференциальная форма замкнута. Обратное в общем случае неверно. Эти вопросы мы подробнее изучим в следующих параграфах.

**9.16. Предложение.** *Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности. Тогда*

(a) *Всякая голоморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega(Y)$ замкнута.*

(b) *Всякая замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{1,0}(Y)$ голоморфна.*

*Доказательство.* Пусть $\omega$ — дифференцируемая дифференциальная форма типа (1, 0). Относительно координатной окрестности $(U, z)$ ее можно записать в виде $\omega = f\,dz$ с дифференцируемой функцией $f$. Для внешнего дифференциала имеем

$$d\omega = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}\right) \wedge dz = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Таким образом, условие $d\omega = 0$ эквивалентно $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, откуда и следует утверждение.

*Вывод.* Если $u$ — гармоническая функция, то $\partial u$ — голоморфная дифференциальная форма. В самом деле, $d\,\partial u = \bar{\partial}\,\partial u = 0$.

**9.17. Прообразы дифференциальных форм.** Пусть $F\colon X \to Y$ — голоморфное отображение между двумя римановыми поверхностями. Для всякого открытого множества $U \subset Y$ отображение $F$ индуцирует гомоморфизм

$$F^*\colon \mathscr{E}(U) \to \mathscr{E}(F^{-1}(U)), \quad F^*(f) := f \circ F.$$

Этим определяются соответствующие отображения для дифференциальных форм

$$F^*\colon \mathscr{E}^{(k)}(U) \to \mathscr{E}^{(k)}(F^{-1}(U)), \quad k = 1, 2,$$

по следующему правилу (употребление того же символа $F^*$ не приведет к недоразумениям). Локально дифференциальная форма первого, соотв. второго, порядка записывается в виде конечной суммы $\sum f_j\,dg_j$, соотв. $\sum f_j\,dg_j \wedge dh_j$ с дифференцируемыми функциями $f_j$, $g_j$, $h_j$. Положим

$$F^*\left(\sum f_j\,dg_j\right) := \sum (F^*f_j)\,d(F^*g_j),$$
$$F^*\left(\sum f_j\,dg_j \wedge dh_j\right) := \sum (F^*f_j)\,d(F^*g_j) \wedge d(F^*h_j).$$

Легко посчитать, что эти определения не зависят от выбора локальных представлений и поэтому однозначно определяют глобальный гомоморфизм векторных пространств $F^*\colon \mathscr{E}^{(k)}(U) \to \mathscr{E}^{(k)}(F^{-1}(U))$. Для $f \in \mathscr{E}(U)$ и $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$ справедливы следующие правила:

(i) $F^*(df) = d(F^*f)$, $\quad F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$,

(ii) $F^*(\partial f) = \partial(F^*f)$, $\quad F^*(\partial\omega) = \partial(F^*\omega)$

и соответствующие формулы для $\bar{\partial}$.

*Вывод.* Если функция $f \in \mathscr{E}(U)$ гармоническая, то функция $F^*f = f \circ F \in \mathscr{E}(F^{-1}(U))$ тоже гармоническая. В самом деле,

$$\partial\bar{\partial}(F^*f) = \partial(F^*\bar{\partial}f) = F^*(\partial\bar{\partial}f) = 0.$$

# § 10. Интегрирование дифференциальных форм

Дифференциальные формы первого порядка можно интегрировать по кривым. Если дифференциальная форма замкнута, то интеграл зависит только от гомотопического класса кривой. Поэтому на односвязной поверхности $X$ неопределенный интеграл от замкнутой дифференциальной формы (начальная точка кривой интегрирования фиксирована, а конечная точка изменяется) является корректно определенной функцией на $X$. Однако, вообще говоря, при интегрировании замкнутых дифференциальных форм получаются многозначные функции, хотя и специального вида, который мы подробно изучим в этом параграфе. Кроме того, мы рассмотрим интегрирование дифференциальных форм второго порядка; это важно знать при переходе от криволинейных интегралов к поверхностным, и это используется при доказательстве теоремы о вычетах.

## A. Дифференциальные формы первого порядка

**10.1.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$. Пусть задана кусочно непрерывно дифференцируемая кривая в $X$, т. е. непрерывное отображение

$$c\colon [0, 1] \to X,$$

такое, что существуют разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ отрезка $[0, 1]$ и карты $(U_k, z_k)$, $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, для которых $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ и функции

$$x_k \circ c\colon [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}, \quad y_k \circ c\colon [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$$

один раз непрерывно дифференцируемы. Интеграл от $\omega$ по кривой $c$ определяется следующим образом. В $U_k$ форму $\omega$ можно записать в виде $\omega = f_k\, dx_k + g_k\, dy_k$ с дифференцируемыми коэффициентами $f_k$, $g_k$. Полагаем

$$\int_c \omega := \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( f_k(c(t)) \frac{dx_k(c(t))}{dt} + g_k(c(t)) \frac{dy_k(c(t))}{dt} \right) dt.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от разбиения отрезка и от выбора карт.

**10.2. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $c$: $[0, 1] \to X$ — кусочно непрерывно дифференцируемая кривая и $F \in \mathscr{E}(X)$. Тогда*

$$\int_c dF = F(c(1)) - F(c(0)).$$

*Доказательство.* Выберем разбиение отрезка $0 = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_n = 1$ и карты $(U_k, z_k)$, как указано выше. В $U_k$ имеем

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial F}{\partial y_k} dy_k.$$

Далее,

$$\int_c dF = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(c(t)) \frac{dx_k(c(t))}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_k}(c(t)) \frac{dy_k(c(t))}{dt} \right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( \frac{d}{dt} F(c(t)) \right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (F(c(t_k)) - F(c(t_{k-1}))) = F(c(1)) - F(c(0)).$$

**10.3. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$. Функция $F \in \mathscr{E}(X)$ называется *первообразной функцией* для $\omega$, если $dF = \omega$.

Согласно (9.15), дифференциальная форма, обладающая первообразной функцией, в частности замкнута.

Первообразная дифференциальной формы определяется неоднозначно: если $F$ — первообразная функция для $\omega$ и $c \in \mathbb{C}$, то $F + c$ — тоже первообразная функция для $\omega$. Обратно, любые две первообразные функции отличаются на константу, так как из $dF = 0$ следует, например по предложению 10.2, что $F$ — константа.

При помощи предложения 10.2 легко вычислять криволинейные интегралы от дифференциальных форм. Кроме того, из этого предложения следует, что интеграл от точной дифференциальной формы по кривой зависит только от начальной и конечной точек этой кривой.

**10.4. Локальное существование первообразных функций.** Пусть $U := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$, $r > 0$, есть открытый круг с центром в нуле на плоскости $\mathbb{C}$, и пусть $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$. Дифференциальную форму $\omega$ можно записать в виде

$$\omega = f\,dx + g\,dy, \quad f, g \in \mathscr{E}(U),$$

где $x$, $y$ — канонические вещественные координатные функции в $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Мы предполагаем, что $\omega$ *замкнута*, т. е. $d\omega = 0$. Так как

$$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

то это эквивалентно условию $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$. Докажем теперь, что $\omega$ обладает первообразной функцией $F \in \mathscr{E}(U)$, которая задается интегралом

$$F(x, y) := \int_0^1 (f(tx, ty)\, x + g(tx, ty)\, y)\, dt, \qquad (x, y) \in U.$$

Непосредственно видно, что $F$ бесконечно дифференцируема. Надо только еще показать, что $dF = \omega$, т. е. $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = g$. Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\, tx + \frac{\partial g(tx, ty)}{\partial x}\, ty + f(tx, ty)\right) dt.$$

Так как $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{d}{dt} f(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)\, y$, то

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \int_0^1 \left(t \frac{d}{dt} f(tx, ty) + f(tx, ty)\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t f(tx, ty))\, dt = f(x, y).$$

Так же доказывается равенство $\frac{\partial F}{\partial y} = g$, а вместе с ним и равенство $dF = \omega$.

В частном случае, когда $\omega$ голоморфна, существование первообразной функции в круге $U$ можно доказать проще. А именно, в этом случае

$$\omega = f\, dz, \qquad \text{где } f \in \mathcal{O}(U).$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

есть разложение Тейлора для $f$. Тогда

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$$

определяет функцию $F \in \mathcal{O}(U)$ с $dF = \omega$.

В общем случае первообразная для замкнутой дифференциальной формы глобально существует лишь как многозначная функция. Это уточняется в следующем предложении.

**10.5. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма. Тогда существует неразветвленное безграничное связное накрытие $p\colon \hat{X} \to X$ и первообразная функция $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ для дифференциальной формы $p^*\omega$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{F}$ — пучок первообразных функций для $\omega$: если $U \subset X$ — открытое подмножество, то $\mathcal{F}(U)$ состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}(U)$ с $df = \omega$ в $U$. Пучок $\mathcal{F}$ удовлетворяет теореме единственности (см. определение 6.9), так как для области $U \subset X$ любые два элемента $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ отличаются на константу. Рассмотрим неразветвленное накрытие $p\colon |\mathcal{F}| \to X$. По предложению 6.10, пространство $|\mathcal{F}|$ хаусдорфово. Теперь мы покажем, что накрытие $p\colon |\mathcal{F}| \to X$ безгранично. У каждой точки $a \in X$, согласно (10.4), найдется связная открытая окрестность $U$ и первообразная функция $f \in \mathcal{F}(U)$ для $\omega$. Тогда $f + c$, $c \in \mathbb{C}$,— общий вид всех первообразных функций для $\omega$ в $U$. Из этого следует, что

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{c \in \mathbb{C}} [U, f + c].$$

Множества $[U, f+c]$ попарно не пересекаются, и все отображения $p\colon [U, f+c] \to U$ суть гомеоморфизмы. Этим доказано, что $p\colon |\mathcal{F}| \to X$ есть неразветвленное безграничное накрытие. Пусть $\hat{X} \subset |\mathcal{F}|$ — некоторая связная компонента. Тогда $p\colon \hat{X} \to X$ — тоже неразветвленное и безграничное накрытие. Так как $\hat{X}$ есть множество функциональных ростков, то условием $F(\varphi) := \varphi(p(\varphi))$ естественно определяется функция $F\colon \hat{X} \to \mathbb{C}$. Из этого определения непосредственно следует, что $F$ есть первообразная функция для $p^*\omega$.

**10.6. Следствие.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — ее универсальное накрытие и $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма. Тогда для $\pi^*\omega$ существует первообразная функция $f \in \mathcal{E}(\tilde{X})$.*

*Доказательство.* Пусть $p\colon \hat{X} \to X$ — неразветвленное безграничное накрытие, которое существует согласно (10.5), и пусть $F \in \mathcal{E}(\hat{X})$ — первообразная функция для $p^*\omega$. Так как $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — универсальное накрытие, то имеется послойное голоморфное отображение $\tau\colon \tilde{X} \to \hat{X}$. Пусть $f := \tau^* F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$. Тогда $f$ есть первообразная функция для $\tau^*(p^*\omega) = \pi^*\omega$.

**10.7 Следствие.** *На односвязной римановой поверхности $X$ всякая замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ имеет первообразную функцию $F \in \mathcal{E}(X)$.*

Это следует из (10.6), так как в этом случае id: $X \longrightarrow X$ — универсальное накрытие.

**10.8. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ — ее универсальное накрытие. Пусть $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма и $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ — первообразная функция для $p^*\omega$. Тогда если $c$: $[0, 1] \longrightarrow X$ есть кусочно непрерывно дифференцируемая кривая и $\hat{c}$: $[0, 1] \longrightarrow \tilde{X}$ — ее поднятие, то*

$$\int_c \omega = F(\hat{c}(1)) - F(\hat{c}(0)).$$

*Доказательство.* Для всякой кусочно непрерывно дифференцируемой кривой $v$: $[0, 1] \longrightarrow \tilde{X}$ и всякой дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ имеем

$$\int_v p^*\omega = \int_{p\circ v} \omega.$$

Это следует непосредственно из определений. Поэтому утверждение следует из предложения 10.2.

**10.9. Замечание.** На основе предложения 10.8 можно определить интеграл от замкнутой дифференциальной формы по любой (непрерывной) кривой $c$: $[0, 1] \longrightarrow X$ указанной там формулой. Это определение не зависит от выбора первообразной функции $F$ для $p^*\omega$, так как любые две первообразные функции отличаются лишь на константу, которая при вычитании уничтожается. Кроме того, это определение не зависит от поднятия кривой $c$. В самом деле, пусть $u$ и $v$ — два поднятия $c$. Так как накрытие $p$: $\tilde{X} \longrightarrow X$ нормальное, см. (5.6), то существует накрывающее преобразование $\sigma$ с $v = \sigma \circ u$. Так как $p \circ \sigma = p$, то $\sigma^*(p^*\omega) = p^*\omega$. Поэтому $\sigma^* F$ тоже является первообразной функцией для $p^*\omega$ и, значит, $\sigma^* F - F = \text{const}$. Отсюда следует, что

$$F(v(1)) - F(v(0)) = \sigma^* F(u(1)) - \sigma^* F(u(0)) = F(u(1)) - F(u(0)),$$

т. е. при обоих поднятиях получается одно и то же значение интеграла.

**10.10. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма.*

(a) *Если $a, b \in X$ и $u, v\colon [0, 1] \longrightarrow X$ — гомотопные кривые из $a$ в $b$, то*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

(b) *Если $u, v\colon [0, 1] \longrightarrow X$ — замкнутые свободно гомотопные кривые, то также*

$$\int_u \omega = \int_v \omega.$$

*Доказательство.* (a) Пусть $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ — универсальное накрытие и $\hat{u}, \hat{v}\colon [0, 1] \longrightarrow \tilde{X}$ — поднятия $u$ и $v$ соответственно с одним и тем же началом. По предложению 4.10, $\hat{u}$ и $\hat{v}$ имеют также одинаковые конечные точки. Поэтому утверждение следует из предложения 10.8.

(b) Пусть кривая $u$ имеет начало и конец в точке $x_0$, а кривая $v$ — в точке $x_1$. Тогда существует кривая $w$ из $x_0$ в $x_1$, такая, что $u$ и $w \cdot v \cdot w^-$ гомотопны, см. (3.13). Поэтому из (a) получаем

$$\int_u \omega = \int_{w \cdot v \cdot w^-} \omega = \int_w \omega + \int_v \omega - \int_w \omega = \int_v \omega.$$

**10.11. Периоды.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма. Тогда, по предложению 10.10, интегралы

$$a_\sigma := \int_\sigma \omega, \qquad \sigma \in \pi_1(X),$$

можно определить при помощи представителей. Эти интегралы называются *периодами* формы $\omega$. Очевидно,

$$\int_{\sigma \cdot \tau} \omega = \int_\sigma \omega + \int_\tau \omega \quad \text{для} \quad \sigma, \tau \in \pi_1(X),$$

и таким образом получается гомоморфизм $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ фундаментальной группы поверхности $X$ в аддитивную группу $\mathbb{C}$. Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом периодов*, соответствующим замкнутой дифференциальной форме $\omega$.

*Пример.* Пусть $X = \mathbb{C}^*$. Согласно (5.7a), $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$. Порождающий элемент $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ определяется кривой $u\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $u(t) = e^{2\pi i t}$. Пусть $\omega := \frac{dz}{z}$, где $z$ — каноническая координатная функция. Тогда

$$\int_u \omega = \int_u \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Поэтому гомоморфизм периодов для $\omega$ есть

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad n \longmapsto 2\pi i n,$$

если изоморфизм $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C}^*)$ реализуется соответствием $n \longmapsto \operatorname{cl}(u^n)$.

**10.12. Автоморфные слагаемые.** Пусть $X$ — риманова поверхность, $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ — ее универсальное накрытие и $G := \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ — группа накрывающих преобразований, которая изоморфна фундаментальной группе, согласно (5.6). Если $\sigma \in G$ и $f\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, то мы определяем функцию $\sigma f\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, полагая $\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$. Если $g\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ — другая функция, то $\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g$ и $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$. Для $\sigma,\ \tau \in G$ имеем $(\sigma\tau) f = \sigma(\tau f)$.

Функция $f\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется *аддитивно автоморфной* с постоянными автоморфными слагаемыми, если существуют константы $a_\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \in G$, такие, что

$$f - \sigma f = a_\sigma \quad \text{для всех } \sigma \in G.$$

Константы $a_\sigma$, которые однозначно определяются функцией $f$, называются *автоморфными слагаемыми* $f$. Для $\sigma,\ \tau \in G$ из $f - \tau f = a_\tau$ следует, что $\sigma f - \sigma\tau f = a_\tau$ и, значит,

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + (\sigma f - \sigma\tau f) = a_\sigma + a_\tau.$$

Таким образом, соответствие $\sigma \longmapsto a_\sigma$ является гомоморфизмом групп $\operatorname{Deck}(\tilde{X}/X) \longrightarrow \mathbb{C}$. Специальные аддитивно автоморфные функции — это функции $f\colon \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, инвариантные по отношению к накрывающим преобразованиям, т. е. такие, что $\sigma f = f$ для всех $\sigma \in G$. Все автоморфные слагаемые такой функции равны нулю. Для такой $f$ существует функция $f_0\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$, такая, что $f = p^* f_0$. Если $f$ дифференцируема, соотв. голоморфна, то $f_0$ тоже дифференцируема, соотв. голоморфна.

**10.13. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ — ее универсальное накрытие.*

(a) *Если $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма и $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ — первообразная функция для $p^*\omega$, то $F$ аддитивно автоморфна с постоянными автоморфными слагаемыми. Ее автоморфные слагаемые $a_\sigma$, $\sigma \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ ввиду изоморфизма $\pi_1(X) \cong \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ в точности являются периодами $\omega$.*

(b) *Пусть, обратно, задана аддитивно автоморфная функция $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ с постоянными автоморфными слагаемыми. Тогда существует ровно одна замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ с $dF = p^*\omega$,*

*Доказательство.* (a) Если $\sigma$ — какое-нибудь накрывающее преобразование, то из-за $p \circ \sigma^{-1} = p$ функция $\sigma F$ — тоже первообразная для $p^*\omega$ и, значит,

$$a_\sigma := F - \sigma F$$

есть константа. Пусть $x_0 \in X$ и $z_0 \in \tilde{X}$ с $p(z_0) = x_0$. Согласно (5.6), элементу $\sigma \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ можно сопоставить элемент $\bar{\sigma} \in \pi_1(X, x_0)$, который представляется следующим образом. Выберем кривую $v$: $[0, 1] \to \tilde{X}$ с $v(0) := y_0 := \sigma^{-1}(z_0)$ и $v(1) := z_0 = \sigma(y_0)$. Тогда $u := p \circ v$ есть замкнутая кривая в $X$ с $\bar{\sigma} = \operatorname{cl}(u)$. По предложению 10.8, период $\omega$ относительно $\bar{\sigma}$ вычисляется по формуле

$$\int_u \omega = F(v(1)) - F(v(0)) = F(z_0) - F(\sigma^{-1}(z_0)) = a_\sigma .$$

(b) Если $F$ имеет автоморфные слагаемые $a_\sigma \in \mathbb{C}$, то для всех $\sigma \in \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ имеем

$$\sigma^*(dF) = d(\sigma^* F) = d(F + a_\sigma) = dF.$$

Таким образом, замкнутая дифференциальная форма $dF$ инвариантна относительно накрывающих преобразований. Так как $p$: $\tilde{X} \to X$ локально биголоморфно, то существует $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ с $dF = p^*\omega$. Очевидно, $\omega$ однозначно определена, а также замкнута.

**10.14. Пример.** Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ ($\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$) есть решетка в $\mathbb{C}$ и $X := \mathbb{C}/\Gamma$. Каноническое факторотображение $\pi$: $\mathbb{C} \to X$ является одновременно универсальным накрытием, и $\operatorname{Deck}(\mathbb{C}/X)$ есть группа всех переносов на векторы $\gamma \in \Gamma$, см. (5.7c). Рассмотрим тождественное отображение $z$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Функция $z$ по отношению к $\operatorname{Deck}(\mathbb{C}/X)$ аддитивно автоморфна с автоморфными слагаемыми $a_\gamma = \gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Поэтому форма $dz$ инвариантна относительно накрывающих преобразований и, таким образом, задает голоморфную дифференциальную форму $\omega \in \Omega(X)$ с $p^*\omega = dz$. Кстати, ее периоды — это как раз элементы решетки $\Gamma$.

**10.15. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность. Замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ обладает первообразной функцией $f \in \mathcal{E}(X)$ тогда и только тогда, когда все периоды $\omega$ равны нулю.*

*Доказательство.* Если $\omega$ обладает первообразной функцией, то, согласно (10.2), все ее периоды равны нулю.

Обратно, предположим, что все периоды $\omega$ равны нулю. Согласно следствию 10.6, на универсальном накрытии $p$: $\tilde{X} \to X$ существует первообразная функция $F \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ для $p^*\omega$. Ввиду (10.13), $F$ имеет автоморфные слагаемые нули, и, значит, существует $f \in \mathcal{E}(X)$ с $F = p^*f$. Эта функция является первообразной для $\omega$, так как из $p^*\omega = dF = d(p^*f) = p^*(df)$ следует, что $\omega = df$.

*Замечание.* Если все периоды $\omega$ равны нулю, то, по предложению 10.2, специальная первообразная функция для $\omega$ задается в виде интеграла

$$f(x) := \int_{x_0}^{x} \omega.$$

Здесь $x_0 \in X$ — фиксированная точка и интеграл берется по какой-нибудь кривой из $x_0$ в $x$ (интеграл в этом случае не зависит от выбора кривой).

**10.16. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$ — голоморфные дифференциальные формы, которые определяют один и тот же гомоморфизм периодов $\pi_1(X) \to \mathbb{C}$. Тогда $\omega_1 = \omega_2$.*

*Доказательство.* Разность $\omega := \omega_1 - \omega_2$ имеет нулевые периоды и поэтому обладает первообразной функцией $f \in \mathcal{O}(X)$. Так как $X$ компактна, то $f$ постоянна и, значит, $\omega = df = 0$.

## B. Дифференциальные формы второго порядка

**10.17.** Рассмотрим сначала интегрирование дифференциальных форм второго порядка в комплексной плоскости. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество и $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$. Тогда $\omega$ можно записать в виде

$$\omega = f\,dx \wedge dy = \frac{i}{2} f\,dz \wedge d\bar{z}, \qquad f \in \mathcal{E}(U).$$

Предположим, что $f$ равна нулю вне некоторого компактного подмножества в $U$. Тогда, по определению,

$$\iint_U \omega := \iint_U f(x, y)\,dx\,dy,$$

где правая часть понимается как обычный двойной интеграл.

Пусть теперь $V$ — другое открытое подмножество в $\mathbb{C}$ и $\varphi$: $V \to U$ — биголоморфное отображение. Если $\varphi = u + iv$ есть разложение на вещественную и мнимую части, то, согласно

уравнениям Коши — Римана, для якобиана отображения $\varphi$ получаем

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = |\varphi'|^2,$$

и, значит, формулу преобразования кратного интеграла можно записать в виде

$$\iint_U f\,dx\,dy = \iint_V (f \circ \varphi)\,|\varphi'|^2\,dx\,dy.$$

С другой стороны,

$$\varphi^*(dz \wedge d\bar{z}) = d\varphi \wedge d\bar{\varphi} = (\varphi'\,dz) \wedge (\overline{\varphi'}\,d\bar{z}) = |\varphi'|^2\,dz \wedge d\bar{z}$$

и, значит, $\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)\,|\varphi'|^2\,dx \wedge dy$. Отсюда следует, что

$$\iint_U \omega = \iint_V \varphi^*\omega.$$

**10.18.** Пусть теперь $X$ — риманова поверхность. *Носителем* дифференциальной формы $\omega$ на $X$ называется замкнутое множество

$$\operatorname{Supp}(\omega) := \overline{\{a \in X : \omega(a) \neq 0\}}.$$

Аналогично определяется носитель $\operatorname{Supp}(f)$ функции $f: X \to \mathbb{C}$.

(a) Пусть $\varphi: U \to V$ — карта на $X$ и $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ — дифференциальная форма с компактным носителем, принадлежащим $U$. Тогда $(\varphi^{-1})^*\omega$ — дифференциальная форма с компактным носителем в $V \subset \mathbb{C}$ и, по определению,

$$\iint_X \omega := \iint_U \omega := \iint_V (\varphi^{-1})^*\omega.$$

Это определение не зависит от выбора карты. В самом деле, пусть $\varphi_1: U_1 \to V_1$ — другая карта с $\operatorname{Supp}(\omega) \subset U_1$. Мы можем без ограничения общности считать, что $U = U_1$ (в противном случае перейдем к их пересечению). Тогда

$$\psi := \varphi_1 \circ \varphi^{-1}: V \to V_1$$

есть биголоморфное отображение. Так как

$$(\varphi^{-1})^*\omega = (\varphi_1^{-1} \circ \psi)^*\omega = \psi^*((\varphi_1^{-1})^*\omega),$$

то, согласно (10.17),

$$\iint_V (\varphi^{-1})^*\omega = \iint_{V_1} (\varphi_1^{-1})^*\omega.$$

Таким образом, $\iint_X \omega$ определен независимо от карты.

(b) Если теперь $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ — произвольная дифференциальная форма с компактным носителем, то имеется конечное число карт $\varphi_k$: $U_k \to V_k$, $k=1, \ldots, n$, таких, что

$$\operatorname{Supp}(\omega) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k.$$

Далее, найдутся функции $f_k \in \mathscr{E}(X)$ со следующими свойствами («разбиение единицы» — см. приложение):

(i) $\operatorname{Supp}(f_k) \subset U_k$;

(ii) $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ для всех $x \in \operatorname{Supp}(\omega)$.

Тогда $f_k \omega$ — дифференциальная форма с $\operatorname{Supp}(f_k\omega) \Subset U_k$ и

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} f_k \omega.$$

Положим

$$\iint_X \omega := \sum_{k=1}^{n} \iint_X f_k \omega.$$

Здесь правая часть определяется согласно (a). Опять легко убедиться, что это определение не зависит от выбора карт и функций $f_k$.

**10.19.** В дальнейшем мы несколько раз будем использовать частный случай *теоремы Стокса* на плоскости. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $A \subset U$ — компактное подмножество с гладкой границей $\partial A$. Тогда для всякой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(U)$ имеем

$$\iint_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Здесь граница ориентирована так, что внешняя нормаль к $A$ и касательный вектор к $\partial A$ в таком порядке образуют положительно ориентированный репер на плоскости.

Мы используем эту теорему только в случае, когда $A$ — круг или круговое кольцо

$$A = \{z \in \mathbb{C}: \ \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}, \qquad 0 < \varepsilon < R.$$

В последнем случае $\partial A$ состоит из положительно ориентированной окружности $|z| = R$ и отрицательно ориентированной окружности $|z| = \varepsilon$. Тогда для $\omega = f\,dx + g\,dy$ теорема Стокса утверждает, что

$$\iint_{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{|z|=R} (f\,dx + g\,dy) - \int_{|z|=\varepsilon} (f\,dx + g\,dy).$$

Мы докажем эту формулу непосредственно, при помощи полярных координат $z = re^{i\theta}$, т. е.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Рассмотрим сначала случай $\omega = g\,dy$ и, значит, $d\omega = \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},$$

то, полагая $\tilde{g}(r, \theta) := g(re^{i\theta})$, мы получаем, что

$$\iint_A d\omega = \iint_{\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R} \frac{\partial g}{\partial x} dx\,dy = \iint_{\substack{\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left(\cos\theta \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}\right) r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_{\substack{\varepsilon \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{g}) - \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \cdot \tilde{g})\right) dr\,d\theta.$$

Далее, для каждого фиксированного $r \in [\varepsilon, R]$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta \cdot \tilde{g})\,d\theta = \sin\theta \cdot \tilde{g}(r, \theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

и, значит,

$$\iint_A d\omega = \int_0^{2\pi} \cos\theta \left(\int_\varepsilon^R \frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{g})\,dr\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \tilde{g}(R, \theta)\,R\cos\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} \tilde{g}(\varepsilon, \theta)\,\varepsilon\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \int_{|z|=R} g\,dy - \int_{|z|=\varepsilon} g\,dy = \int_{\partial A} \omega.$$

Случай $\omega = f\,dx$ можно свести к рассмотренному выше координатным преобразованием $(x, y) \longmapsto (y, -x)$ с определителем единица. Тем самым теорема Стокса для кругового кольца доказана. Случай круга получается отсюда предельным переходом при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

**10.20. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ — дифференциальная форма с компактным носителем. Тогда*

$$\iint_X d\omega = 0.$$

*Доказательство.* Домножая, как в (10.18b), на функции из разбиения единицы, форму $\omega$ можно разложить в сумму $\omega=\omega_1+\ldots+\omega_n$, где каждая $\omega_k$ имеет компактный носитель, целиком принадлежащий некоторой карте. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $X=\mathbb{C}$.

Выберем $R>0$ настолько большим, что

$$\operatorname{Supp}(\omega)\subset\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<R\}.$$

Тогда

$$\iint_{\mathbb{C}} d\omega=\iint_{|z|\leqslant R} d\omega=\int_{|z|=R}\omega=\int_{|z|=R}0=0.$$

**10.21. Теорема о вычетах.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные точки в $X$. Тогда для всякой дифференциальной формы $\omega\in\Omega(X')$, голоморфной в $X':=X\setminus\{a_1, \ldots, a_n\}$, имеем*

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{a_k}(\omega)=0.$$

*Доказательство.* Существуют координатные окрестности $(U_k, z_k)$ точек $a_k$ с $U_j\cap U_k=\varnothing$ для $j\neq k$. Мы можем считать, что $z_k(a_k)=0$ и что $z_k(U_k)$ — единичный круг. Выберем для каждого $k=1, \ldots, n$ функцию $f_k\in\mathcal{E}(X)$ с компактным носителем $\operatorname{Supp}(f_k)\subset U_k$ так, что имеется открытая окрестность $U'_k\subset U_k$ точки $a_k$ с $f_k|U'_k=1$. Положим $g:=1-(f_1+\ldots+f_n)$. Тогда $g|U'_k=0$ и, значит, $g\omega$ можно продолжить нулем в точки $a_k$ и рассматривать как элемент в $\mathcal{E}^{(1)}(X)$. Согласно (10.20),

$$\iint_X d(g\omega)=0.$$

Так как $\omega$ голоморфна, то $d\omega=0$ в $X'$. В $U'_k\cap X'$ имеем $f_k\omega=\omega$ и, значит, $d(f_k\omega)=0$. Поэтому $d(f_k\omega)$ можно рассматривать как элемент в $\mathcal{E}^{(2)}(X)$, носитель которого является компактным подмножеством в $U_k\setminus\{a_k\}$. Из равенства $d(g\omega)=-\sum d(f_k\omega)$ следует теперь, что

$$\sum_{k=1}^{n}\iint_X d(f_k\omega)=0.$$

Таким образом, теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\iint_X d(f_k\omega)=-2\pi i\operatorname{Res}_{a_k}(\omega).$$

Так как носитель $d(f_k\omega)$ содержится в $U_k$, то интегрировать надо только по $U_k$. При помощи $z_k$ мы можем отождествить $U_k$ с единичным кругом. Тогда найдутся числа $0<\varepsilon<R<1$, такие, что

$$\operatorname{Supp}(f_k)\subset\{|z_k|<R\} \quad \text{и} \quad f_k|\{|z_k|\leqslant\varepsilon\}=1.$$

Поэтому

$$\iint\limits_X d(f_k\omega)=\iint\limits_{\varepsilon\leqslant|z_k|\leqslant R} d(f_k\omega)=\int\limits_{|z_k|=R} f_k\omega-\int\limits_{|z_k|=\varepsilon} f_k\omega=$$
$$=-\int\limits_{|z_k|=\varepsilon}\omega=-2\pi i\operatorname{Res}_{a_k}(\omega)$$

по теореме о вычетах в комплексной плоскости.

**10.22. Следствие.** *Непостоянная мероморфная функция $f$ на компактной римановой поверхности $X$ имеет с учетом кратностей столько же нулей, сколько и полюсов.*

*Доказательство.* Дифференциальная форма $\omega:=\frac{df}{f}$ голоморфна вне нулей и полюсов функции $f$. Если $a\in X$ — нуль (соотв. полюс) $m$-го порядка для $f$, то $\operatorname{Res}_a(\omega)=m$ (соотв. $\operatorname{Res}_a(\omega)=-m$). Поэтому утверждение следует из теоремы о вычетах.

*Замечание.* Это следствие мы уже доказали однажды в (4.25) при помощи теории накрытий.

## § 11. Линейные дифференциальные уравнения

В этом параграфе мы займемся решением дифференциальных уравнений вида $w'=A(z)w$, где $A(z)$ — заданная $n\times n$-матрица, голоморфно зависящая от $z$. Ищется векторнозначная функция $w=w(z)$, удовлетворяющая этому уравнению. Локально при заданном начальном условии $w(z_0)=w_0$ всегда существует однозначно определенное голоморфное решение. Это решение можно продолжать вдоль любой кривой в области определения $A$, однако это продолжение, вообще говоря, уже не будет однозначной функцией. Оказывается, что тщательное исследование характера многозначностей дает хорошее представление о структуре решений.

**11.1. Обозначения.** Мы обозначаем через $M(n\times m, \mathbb{C})$ векторное пространство всех $n\times m$-матриц с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а через $GL(n, \mathbb{C})$ — группу всех обратимых $n\times n$-матриц с комп-

лексными коэффициентами. Если $X$ — риманова поверхность, то отображение

$$A\colon X \longrightarrow M(n\times m,\ \mathbb{C})$$

называется голоморфным, когда голоморфны все элементы $a_{ij}\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ матрицы $A$. Множество всех голоморфных отображений $A\colon X \longrightarrow M(n\times m,\ \mathbb{C})$ обозначается $M(n\times m,\ \mathcal{O}(X))$. Аналогично определяется $GL(n,\ \mathcal{O}(X))$.

**11.2. Предложение.** *Пусть $A \in M(n\times n,\ \mathcal{O}(D))$ — голоморфная $n\times n$-матрица в круге*

$$D := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < R\}, \qquad 0 < R \leqslant \infty.$$

*Тогда для каждого $w_0 \in \mathbb{C}^n$ существует ровно одна голоморфная функция $w\colon D \longrightarrow \mathbb{C}^n$, такая, что*

(1) $\qquad w'(z) = A(z)\,w(z)$ *при всех* $z \in D$,

(2) $\qquad w(0) = w_0$.

(При этом мы отождествляем $\mathbb{C}^n$ с пространством $M(n\times 1,\ \mathbb{C})$ вектор-столбцов.)

*Доказательство.* (a) Матрицу $A$ можно разложить в ряд Тейлора

$$A(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu, \qquad A_\nu = (a_{ij\nu}) \in M(n\times n,\ \mathbb{C}).$$

(Это надо понимать как систему из $n^2$ равенств для компонент $A(z)$.) Решение $w$ будем искать в виде ряда

$$w(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu, \qquad c_\nu = (c_{i\nu}) \in \mathbb{C}^n.$$

Если этот ряд сходится в $D$, то (1) равносильно условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1} = \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu z^\mu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu+\nu=k} A_\mu c_\nu\right) z^k,$$

т. е.

(3) $\qquad (k+1)\,c_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{k} A_{k-\nu} c_\nu \quad$ для всех $\quad k \in \mathbb{N}$.

Начальное условие (2) эквивалентно $c_0 = w_0$. Поэтому из (3) можно рекуррентно вычислить все коэффициенты $c_k$. Этим доказана единственность.

(b) Чтобы доказать существование решения, достаточно показать, что ряд для $w$, построенный по коэффициентам, которые вычисляются из (3), сходится в $D$. Для этого мы используем мажорантный метод Коши.

Для произвольного $r$, $0<r<R$, ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{ij\nu}| r^{\nu}$$

сходится. Поэтому существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что

(4) $|a_{ij\nu}| \leqslant N r^{-\nu-1}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $i, j = 1, \ldots, n$.

Определим голоморфную $n \times n$-матрицу $B=(b_{ij})$ в $|z|<r$ условием

(5) $$b_{ij}(z) := \frac{N}{r}\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-1} = \frac{N}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{r^{\nu}} \quad \text{для всех } i, j.$$

Пусть $w_0=(w_{10}, \ldots, w_{n0})$ и $K := \max\{|w_{10}|, \ldots, |w_{n0}|\}$. Решим теперь в круге $|z|<r$ дифференциальное уравнение

$$v'(z) = B(z)\,v(z)$$

с начальным условием $v(0)=(K, \ldots, K)$. Единственное, ввиду (a), решение этого дифференциального уравнения задается формулой

$$v(z) = (\psi(z), \ldots, \psi(z)),$$

где

$$\psi(z) = K\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-nN},$$

так как

$$\psi'(z) = \frac{KnN}{r}\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-nN-1} = n\,\frac{N}{r}\left(1-\frac{z}{r}\right)^{-1}\psi(z).$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение $v'=Bv$ можно решать при помощи разложения в степенной ряд. Если

$$B(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_{\nu} z^{\nu}, \qquad B_{\nu} = (b_{ij\nu}) \in M(n\times n, \mathbb{C}),$$

и

$$v(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu} z^{\nu}, \qquad \gamma_{\nu} = (\gamma_{i\nu}) \in \mathbb{C}^n,$$

— ряды Тейлора, то аналогично (a) имеем

(6) $$(k+1)\,\gamma_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{k} B_{k-\nu}\gamma_{\nu}.$$

Из (4) и (5) следует, что

$$|a_{ij\nu}| \leqslant b_{ij\nu} \quad \text{для всех } i, j, \nu,$$

Так как $|c_{i0}|=|w_{i0}|\leqslant K=\gamma_{i0}$ для $i=1, \ldots, n$, то, ввиду (3) и (6), индукцией по $k$ устанавливаем, что

$$|c_{ik}|\leqslant\gamma_{ik} \quad \text{для всех} \quad k\in\mathbb{N} \quad \text{и} \quad i=1, \ldots, n.$$

Так как ряд $\sum_k \gamma_{ik}z^k=\psi(z)$ сходится при $|z|<r$, то ряд $\sum_k c_k z^k=w(z)$ тоже сходится при $|z|<r$.

Поскольку $r<R$ было произвольным, этот ряд сходится во всем круге $D=\{|z|<R\}$, ч. т. д.

**11.3.** На римановой поверхности $X$ линейное дифференциальное уравнение для неизвестной голоморфной функции $w$: $X\longrightarrow\mathbb{C}^n$ записывается в виде

$$dw=Aw,$$

где $A=(a_{ij})\in M(n\times n, \Omega(X))$ — заданная $n\times n$-матрица из голоморфных дифференциальных форм $a_{ij}\in\Omega(X)$. Относительно локальной карты $(U, z)$ на $X$ имеем $A=F\,dz$, где $F\in M(n\times n, \mathcal{O}(U))$, и это дифференциальное уравнение переходит в уравнение вида

$$\frac{dw}{dz}=F\cdot w,$$

которое изучалось выше в (11.2).

**11.4. Предложение.** *Пусть $X$ — односвязная риманова поверхность, $A\in M(n\times n, \Omega(X))$ и $x_0\in X$. Тогда для всякого $c\in\mathbb{C}^n$ существует ровно одно решение $w\in\mathcal{O}(X)^n$ дифференциального уравнения*

$$dw=Aw$$

*с $w(x_0)=c$.*

*Доказательство.* (a) По предложению 11.2, имеется связная открытая окрестность $U_0\ni x_0$ и решение $f\in\mathcal{O}(U_0)^n$ дифференциального уравнения $df=Af$ с $f(x_0)=c$. Покажем теперь, что это $f$ допускает аналитическое продолжение вдоль любой кривой $\alpha$: $[0, 1]\longrightarrow X$ с начальной точкой $x_0$. По следствию 7.4, эти продолжения объединяются в одну глобальную функцию $w\in\mathcal{O}(X)^n$, которая, ввиду теоремы единственности, удовлетворяет дифференциальному уравнению $dw=Aw$ на всей $X$.

(b) По предложению 11.2, существуют разбиение

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_k=1$$

отрезка $[0, 1]$ и области $U_j$, $j=1, \ldots, k-1$, со следующими свойствами:

(i) $\alpha([t_j, t_{j+1}])\subset U_j$ для $j=0, \ldots, k-1$
(здесь $U$ — названная в начале окрестность $x_0$).

(ii) Для произвольного начального значения $c_j\in\mathbb{C}^n$ существует $f_j\in\mathcal{O}(U_j)^n$ с $df_j=Af_j$ и $f_j(\alpha(t_j))=c_j$, $j=1, \ldots, k-1$.

Исходя из решения $f_0:=f$ в $U_0$, можно, согласно (a), индукцией по $j$ построить решения $f_j$ в $U_j$ с

$$f_j(\alpha(t_j))=f_{j-1}(\alpha(t_j)).$$

Из утверждения о единственности в предложении 11.2 и теоремы единственности следует, что $f_{j-1}$ и $f_j$ совпадают на связной компоненте множества $U_{j-1}\cap U_j$, в которой лежит $\alpha(t_j)$. Этим доказана продолжаемость $f$ вдоль $\alpha$.

**11.5. Следствие.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $p\colon \tilde{X}\to X$ — ее универсальное накрытие и точки $x_0\in X$, $y_0\in\tilde{X}$, такие, что $p(y_0)=x_0$. Пусть $A\in M(n\times n, \Omega(X))$ и $c\in\mathbb{C}^n$. Тогда на универсальном накрытии существует однозначно определенное решение $w\in\mathcal{O}(\tilde{X})^n$ дифференциального уравнения*

$$dw=(p^*A)\,w$$

*с $w(y_0)=c$.*

**11.6. Автоморфные множители.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $A\in M(n\times n, \Omega(X))$. На универсальном накрытии $p\colon \tilde{X}\to X$ пусть $L_A$ есть множество всех решений $w\in\mathcal{O}(\tilde{X})^n$ дифференциального уравнения

$$dw=(p^*A)\,w.$$

Как и в теории вещественных линейных дифференциальных уравнений, доказывается, что $L_A$ есть $n$-мерное векторное пространство (над $\mathbb{C}$) и что $w_1, \ldots, w_n\in L_A$ линейно независимы тогда и только тогда, когда для произвольно заданной точки $a\in\tilde{X}$ векторы $w_1(a), \ldots, w_n(a)\in\mathbb{C}^n$ линейно независимы. Поэтому базис $w_1, \ldots, w_n$ в $L_A$ определяет обратимую матрицу

$$\Phi:=(w_1, \ldots, w_n)\in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$$

с $d\Phi=(p^*A)\Phi$. Такая матрица $\Phi$ называется *фундаментальной системой решений* дифференциального уравнения $dw=Aw$. Пусть $G:=\operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)\cong\pi_1(X)$ есть группа накрывающих преобразований накрытия $p\colon \tilde{X}\to X$. Для $\sigma\in G$ положим $\sigma\Phi:=\Phi\circ\sigma^{-1}$ аналогично (10.12). Вместе с $\Phi$ и матрица $\sigma\Phi$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $d(\sigma\Phi)=(p^*A)(\sigma\Phi)$ и, таким образом, тоже является фундаментальной системой

решений. Поэтому существует такая постоянная матрица $T_\sigma \in GL(n, \mathbb{C})$, что

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma.$$

Если $\tau$—другое накрывающее преобразование, то

$$\Phi T_{\tau\sigma} = \tau\sigma\Phi = (\tau\Phi) T_\sigma = \Phi T_\tau T_\sigma,$$

т. е. $T_{\tau\sigma} = T_\tau T_\sigma$. Соответствие $\sigma \mapsto T_\sigma$ определяет тем самым гомоморфизм групп

$$\pi_1(X) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \to GL(n, \mathbb{C}).$$

Матрицы $T_\sigma$ называются *автоморфными множителями* для $\Phi$. Обратно, пусть заданы гомоморфизм

$$T\colon \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \to GL(n, \mathbb{C}), \quad \sigma \mapsto T_\sigma,$$

и голоморфное отображение

$$\Phi\colon \tilde{X} \to GL(n, \mathbb{C}),$$

такое, что

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \mathrm{Deck}(\tilde{X}/X).$$

Матрица $(d\Phi)\Phi^{-1} \in M(n \times n, \Omega(\tilde{X}))$ инвариантна относительно накрывающих преобразований, так как

$$\sigma(d\Phi \cdot \Phi^{-1}) = (d\Phi \cdot T_\sigma)(\Phi T_\sigma)^{-1} = d\Phi \cdot \Phi^{-1}.$$

Поэтому существует матрица $A \in M(n \times n, \Omega(X))$ с $p^*A = d\Phi \cdot \Phi^{-1}$, и $\Phi$ есть фундаментальная система решений дифференциального уравнения $dw = Aw$.

**11.7.** Рассмотрим теперь частный случай

$$X := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < R\}, \qquad 0 < R \leqslant \infty.$$

Согласно (5.7b), универсальное накрытие $p\colon \tilde{X} \to X$ имеет группу накрывающих преобразований $\mathbb{Z}$. Обозначим через $\sigma$ порождающий элемент $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$. На $\tilde{X}$ существует логарифм координатной функции для $X$, т. е. существует голоморфная функция

$$\log\colon \tilde{X} \to \mathbb{C},$$

такая, что $\exp \circ \log = p$. Мы можем считать, что $\sigma$ выбран так, что

$$\sigma \log = \log + 2\pi i.$$

Пусть $A \in M(n \times n, \Omega(X))$ и $\Phi \in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$—фундаментальная система решений дифференциального уравнения $dw = Aw$.

Так как $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) = \{\sigma^n : n \in \mathbb{Z}\}$, то поведение $\Phi$ относительно накрывающих преобразований уже однозначно определяется матрицей $T \in GL(n, \mathbb{C})$ с

$$\sigma\Phi = \Phi T.$$

Если $\Psi \in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ — другая фундаментальная система решений для $dw = Aw$, то существует матрица $S \in GL(n, \mathbb{C})$ с $\Psi = \Phi S$ и, значит,

$$\sigma\Psi = \Psi S^{-1}TS = \Psi\tilde{T},$$

где $\tilde{T} = S^{-1}TS$. При подходящем выборе фундаментальной системы $\Psi$ можно, таким образом, добиться, чтобы автоморфный множитель $T$ имел нормальную жорданову форму.

**11.8. Экспонента от матриц.** Для матрицы $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ экспонента определяется равенством

$$\exp(A) = \sum_{k\ 0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Этот ряд покомпонентно абсолютно сходится. Если матрицы $A$, $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ перестановочны, т. е. $AB = BA$, то

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Это доказывается так же, как для экспоненты от комплексных чисел, при помощи произведения рядов для $\exp A$ и $\exp B$. В частности, для $B = -A$ получается, что $\exp A \times \times \exp(-A) = E$, т. е. $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{C})$.

Для $S \in GL(n, \mathbb{C})$ и $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ имеем

(*) $$\exp(S^{-1}AS) = S^{-1}(\exp A)S.$$

Для всякой матрицы $B \in GL(n, \mathbb{C})$ найдется матрица $A \in \in M(n \times n, \mathbb{C})$, такая, что

$$\exp(A) = B.$$

Ввиду (*), это достаточно доказать для случая, когда $B$ имеет нормальную жорданову форму. Если $B$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$, то в качестве $A$ можно выбрать просто диагональную матрицу с диагональными элементами $\mu_1, \ldots, \mu_n$, где $\exp(\mu_j) = \lambda_j$. Общая матрица в нормальной жордановой форме состоит из жорда-

новых клеток вида

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(E + \frac{1}{\lambda}N\right),$$

$$\text{где } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_1$ с $\exp(A_1) = B_1$ задается условием

$$A_1 = \mu E + M,$$

где $\exp(\mu) = \lambda$ и

$$M = \log\left(E + \frac{1}{\lambda}N\right) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k\lambda^k} N^k.$$

Этот ряд обрывается на конечном числе слагаемых, так как матрица $N$ нильпотентна.

**11.9.** Если $A$ есть $n \times n$-матрица, элементы которой суть голоморфные функции на римановой поверхности $X$, то элементы матрицы $\exp(A)$ тоже голоморфны на $X$, так как ряд компактно сходится на $X$.

Если $A \in M(n \times n, \mathcal{O}(X))$ удовлетворяет условию

$$A \cdot dA = dA \cdot A,$$

то

$$d(\exp(A)) = dA \cdot \exp(A) = \exp(A) \cdot dA,$$

что проверяется непосредственно почленным дифференцированием экспоненциального ряда.

**11.10. Предложение.** *Пусть* $T \in GL(n, \mathbb{C})$ — *некоторая заданная матрица и* $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ — *матрица, удовлетворяющая условию*

$$\exp(2\pi i B) = T.$$

*Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$w' = \frac{1}{z} Bw$$

*в* $X = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < R\}$. *Тогда*

$$\Phi_0 := \exp(B \log)$$

*является фундаментальной системой решений для* $w' = Aw$ *на универсальном накрытии* $p\colon \tilde{X} \to X$ *с автоморфным соотношением*

$$\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T.$$

Здесь $\sigma$ определяется, как в (11.7).

*Доказательство.* Из замечания в (11.9) следует, что $\Phi_0' = \frac{1}{z} B\Phi_0$. Кроме того,

$$\sigma\Phi_0 = \sigma(\exp(B \log)) = \exp(B\sigma \log) = \\ = \exp(B(\log + 2\pi i)) = \exp(B \log) \exp(2\pi i B) = \Phi_0 T.$$

*Замечание.* Это предложение показывает, что в проколотом круге $X$ наперед заданному автоморфному соотношению всегда можно сопоставить дифференциальное уравнение, решения которого именно так ведут себя относительно накрывающих преобразований. В § 31 мы займемся этой же проблемой на произвольной некомпактной римановой поверхности.

**11.11. Предложение.** (Обозначения — как в предложении 11.10.) *Пусть* $A \in M(n \times n, \mathcal{O}(X))$. *Тогда дифференциальное уравнение*

$$w' = Aw$$

*обладает фундаментальной системой решений* $\Phi \in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ *вида*

$$\Phi = \Psi\Phi_0,$$

*где* $\Phi_0 = \exp(B \log)$ *с постоянной матрицей* $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$, *а* $\Psi$ *инвариантна по отношению к накрывающим преобразованиям, т. е.* $\Psi$ *можно понимать как элемент из* $GL(n, \mathcal{O}(X))$.

*Доказательство.* Пусть $\Phi \in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$ — фундаментальная система решений для $w' = Aw$ и

$$\sigma\Phi = \Phi T, \qquad T \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Согласно (11.10), найдется $\Phi_0 = \exp(B \log) \in GL(n, \mathcal{O}(\tilde{X}))$, такая, что

$$\sigma\Phi_0 = \Phi_0 T.$$

Для $\Psi := \Phi\Phi_0^{-1}$ имеем тогда $\sigma\Psi = \Psi$, ч. т. д.

**11.12.** По предложению 11.11, фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $w' = Aw$ в проколотом круге $X = \{0 < |z| < R\}$ можно описать как произведение многозначной функции $\Phi_0 = \exp(B \log)$ весьма специального вида на однозначную (матричнозначную) функцию $\Psi$. Эту функцию $\Psi$ можно разложить в ряд Лорана. Точка 0 называется *особенностью фуксова типа* для дифференциального уравнения $w' = Aw$, если $\Psi$ имеет в нуле самое большее полюс, т. е. если в ее лорановское разложение в этой точке входит лишь конечное число членов с отрицательными показателями.

**11.13. Предложение.** *Пусть* $X := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z| < R\}$. *Если матрица* $A \in M(n \times n, \mathcal{O}(X))$ *имеет в нуле не более чем полюс первого порядка, то нуль является особенностью фуксова типа для дифференциального уравнения* $w' = Aw$.

*Доказательство.* Для этого нам нужны два вспомогательных предложения.

(1) *Пусть* $K \geqslant 0$ — *константа и* $F\colon (0, r_0] \to \mathbb{R}_+^*$ — *непрерывно дифференцируемая положительная функция, которая удовлетворяет дифференциальному неравенству*

$$|F'(r)| \leqslant \frac{K}{r} F(r) \quad \text{для всех} \quad r \in (0, r_0].$$

*Тогда*

$$F(r) \leqslant F(r_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-K} \quad \text{для всех} \quad r \in (0, r_0].$$

*Доказательство* (1). Из условия следует, что

$$\frac{d}{dr} \log F(r) = \frac{F'(r)}{F(r)} \geqslant -\frac{K}{r}.$$

Интегрирование по отрезку $[r, r_0]$ дает

$$\log \frac{F(r_0)}{F(r)} \geqslant -K \log \frac{r_0}{r}$$

и, значит,

$$F(r) \leqslant F(r_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-K}.$$

(2) *Для всякой голоморфной в* $X$ *функции* $f$ *имеем*

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} |f|^2\right| \leqslant 2|f||f'|.$$

Здесь $\partial/\partial r$ обозначает радиальную производную относительно полярных координат $z = re^{i\theta}$.

*Доказательство* (2). Так как $f$ комплексно дифференцируема, то

$$f' = \frac{df}{dz} = \frac{1}{e^{i\theta}} \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{и, значит,} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| = |f'|.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial r}}\right) \quad \text{и, значит,} \quad \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right| = |f'|.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial r} |f|^2\right| = \left|\bar{f} \frac{\partial f}{\partial r} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right| \leqslant 2|f||f'|.$$

Теперь перейдем собственно к доказательству предложения 11.13. Согласно (11.11), фундаментальную систему решений для $w' = Aw$ можно записать в виде $\Phi = \Psi\Phi_0$, где $\Psi \in GL(n, \mathcal{O}(X))$ и $\Phi_0 = \exp(B \log)$ с $B \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Отсюда

$$\Phi' = A\Phi = \Psi'\Phi_0 + \Psi\Phi_0' = \Psi'\Phi_0 + \Psi \cdot \frac{1}{z} B\Phi_0.$$

Умножая справа на $\Phi_0^{-1}$, получаем, что $A\Psi = \Psi' + \frac{1}{z}\Psi B$, т. е.

$$(*) \qquad \Psi' = A\Psi - \frac{1}{z}\Psi B.$$

Матрица $A$ имеет в 0 полюс не выше первого порядка, и поэтому существует голоморфная во всем круге $|z| < R$ матрица $A_1$ с $A = \frac{1}{z} A_1$. Если определить норму матрицы $C = (c_{jk})$ формулой

$$\|C\| := \left(\sum_{j,\,k} |c_{jk}|^2\right)^{1/2},$$

то из (*) следует, что для заданного $r_0 \in (0, R)$ найдется константа $M \geqslant 0$, такая, что

$$\|\Psi'(z)\| \leqslant \frac{M}{r} \|\Psi(z)\| \quad \text{для} \quad 0 < |z| = r \leqslant r_0.$$

Пусть $\psi_{jk}$ — компоненты матрицы $\Psi$. Для фиксированного $\theta \in \mathbb{R}$ положим

$$F(r) := \|\Psi(re^{i\theta})\|^2 = \sum_{j,\,k} |\psi_{jk}(re^{i\theta})|^2.$$

Отсюда при помощи (2) получается, что

$$|F'(r)| \leqslant 2 \sum_{j,\,k} |\psi_{jk}(re^{i\theta})| \cdot |\psi_{jk}'(re^{i\theta})| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\Psi(re^{i\theta})\| \cdot \|\Psi'(re^{i\theta})\| \leqslant \frac{2M}{r} \|\Psi(re^{i\theta})\|^2,$$

т. е. $|F'(r)| \leqslant \frac{2M}{r} F(r)$. Теперь из (1) следует, что

$$F(r) \leqslant F(r_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2M},$$

т. е.

$$\|\Psi(re^{i\theta})\| \leqslant \|\Psi(r_0 e^{i\theta})\| \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-M}.$$

Поэтому $\Psi$ в нуле может иметь не более чем полюс порядка $\leqslant M$, ч. т. д.

Теперь мы хотим извлечь из предложения 11.13 одно следствие о виде решений некоторых часто встречающихся на практике линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

**11.14. Предложение.** *Пусть* $D := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < R\}$ *и* $X := D \setminus \{0\}$. *Пусть* $a, b \in \mathcal{O}(D)$. *Тогда дифференциальное уравнение*

(1) $$w'' + \frac{a(z)}{z} w' + \frac{b(z)}{z^2} w = 0$$

*обладает на универсальном накрытии* $p: \tilde{X} \longrightarrow X$ *фундаментальной системой решений* $(\varphi_1, \varphi_2)$ *следующего вида*:

*либо* $$\begin{cases} \varphi_1(z) = z^{\rho_1}\psi_1(z), \\ \varphi_2(z) = z^{\rho_2}\psi_2(z), \end{cases}$$

*либо* $$\begin{cases} \varphi_1(z) = z^{\rho}\psi_1(z), \\ \varphi_2(z) = z^{\rho}(\psi_1(z)\log z + \psi_2(z)). \end{cases}$$

*Здесь* $\rho, \rho_1, \rho_2$ — *комплексные числа и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{O}(D)$.

*Замечание.* $\log z$ и $z^{\rho} = e^{\rho \log z}$ — однозначные голоморфные функции на $\tilde{X}$; голоморфные функции в $D$ понимаются как функции на $\tilde{X}$, инвариантные относительно накрывающих преобразований.

*Доказательство.* Сведем это дифференциальное уравнение к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, полагая

$$w_1 := w, \qquad w_2 = zw'.$$

Так как $w_2' = zw'' + w'$, то (1) эквивалентно системе

(2) $$\begin{cases} w_1' = \frac{1}{z} w_2, \\ w_2' = \frac{-b(z)}{z} w_1 + \frac{1-a(z)}{z} w_2. \end{cases}$$

К системе (2) применимо предложение 11.13, и, таким образом, фундаментальная система решений представляется в виде

$$\Phi(z) = z^n \Psi(z) \exp(B \log z),$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\Psi \in GL(2, \mathcal{O}(D))$, $B \in M(2\times 2, \mathbb{C})$. Преобразуя базис, можно считать даже, что $B$ имеет нормальную жорданову форму.

*Случай 1.* $B$ — диагональная матрица, $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\exp(B \log z) = \begin{pmatrix} z^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & z^{\alpha_2} \end{pmatrix},$$

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) \\ z\varphi_1'(z) & z\varphi_2'(z) \end{pmatrix} = z^n \begin{pmatrix} \psi_1(z) & \psi_2(z) \\ \psi_3(z) & \psi_4(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & z^{\alpha_2} \end{pmatrix}$$

и, значит, $\varphi_1(z) = z^{n+\alpha_1}\psi_1(z)$, $\varphi_2(z) = z^{n+\alpha_2}\psi_2(z)$.

*Случай 2.* $B$ — жорданова клетка, $B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Тогда

$$\exp(B \log z) = z^\alpha \begin{pmatrix} 1 & \log z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда получается, что

$\varphi_1(z) = z^{n+\alpha}\psi_1(z)$, $\quad \varphi_2(z) = z^{n+\alpha}(\psi_1(z)\log z + \psi_2(z))$, ч. т. д.

**11.15. Дифференциальное уравнение Бесселя.** В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение Бесселя в $\mathbb{C}^*$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) w = 0. \tag{1}$$

Здесь $p$ — произвольное комплексное число. По предложению 11.14, это дифференциальное уравнение обладает по крайней мере одним решением вида

$$\varphi(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad c_0 \neq 0. \tag{2}$$

Дифференцирование ряда дает

$$\varphi'(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} (\rho + n) c_n z^{n-1},$$

$$\varphi''(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{\infty} (\rho + n)(\rho + n - 1) c_n z^{n-2}.$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение и рассматривая коэффициенты при $z^{\rho+n-2}$, мы получаем, что это дифференциальное уравнение удовлетворяется тогда и только тогда, когда

(i) $(\rho^2 - p^2) c_0 = 0$,

(ii) $((\rho + 1)^2 - p^2) c_1 = 0$,

(iii) $((\rho + n)^2 - p^2) c_n + c_{n-2} = 0$ для всех $n \geqslant 2$.

Так как $c_0 \neq 0$, то из (i) получается, что с необходимостью $\rho = \pm p$.

Тогда для четных $n = 2k$ равенство (iii) переходит в

(iii)' $$2^2 k (\rho + k) c_{2k} + c_{2k-2} = 0.$$

Теперь мы различаем два случая.

*Случай 1.* $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Тогда система уравнений (i)—(iii) имеет решение

$$c_{2k+1} = 0,$$

$$c_{2k} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{c_0}{k! (\rho + 1) \ldots (\rho + k)}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ с произвольным $c_0$. Так как

$$\Gamma(\rho + k + 1) = (\rho + k)(\rho + k - 1) \ldots (\rho + 1) \Gamma(\rho + 1),$$

то, в частности, при $c_0 = 1/\Gamma(\rho + 1)$ получаем, что

$$c_{2k} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\rho + k + 1)}.$$

*Бесселева функция* индекса $\rho$ определяется равенством

$$J_\rho(z) := \left(\frac{z}{2}\right)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\rho + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Изложенные выше соображения показывают, что $J_p$ и $J_{-p}$ — два линейно независимых решения дифференциального уравнения (1).

*Случай 2.* $p \in \mathbb{Z}$. Мы можем считать, что $p \geqslant 0$. Здесь разложение (2) при $\rho = p$ с необходимостью приводит к решению $\varphi(z) = \text{const} \cdot J_p(z)$.

Если $p \neq 0$ и $\rho = -p$, то из $c_0 \neq 0$ с учетом (iii)' следует прежде всего, что $c_{2k} \neq 0$ для всех $k < p$, а при $k = p$ получается противоречие: $0 \cdot c_{2p} + c_{2p-2} = 0$. Таким образом, при целочисленных $p$ разложение (2) дает лишь одно линейно независимое решение. По предложению 11.14, дифференциальное уравнение (1) обладает другим линейно независимым с $J_p$ решением вида

$$\psi(z) = J_p(z) \log z + g(z),$$

где $g$ — голоморфная в $\mathbb{C}^*$ функция, которая в 0 имеет не более чем полюс. Дифференцируя, получаем

$$\psi'(z) = J_p'(z)\log z + \frac{1}{z} J_p(z) + g'(z),$$

$$\psi''(z) = J_p''(z)\log z + \frac{2}{z} J_p'(z) - \frac{1}{z^2} J_p(z) + g''(z).$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение и используя то, что $w = J_p(z)$ уже является решением (1), мы получаем, что $\psi$ является решением (1) в точности тогда, когда

$$g''(z) + \frac{1}{z} g'(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) g(z) = -\frac{2}{z} J_p'(z).$$

Это уравнение можно разрешить при помощи степенного ряда вида

$$g(z) = z^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

который определяется однозначно с точностью до слагаемого, кратного $J_p$. При подходящей нормировке отсюда получаются так называемые *функции Неймана* $N_p$: как решения (1), которые вместе с $J_p$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения Бесселя (1); см. [52], [55].

# Глава II
# КОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Среди римановых поверхностей особо важный класс образуют компактные поверхности, так как к ним относятся, в частности, все накрывающие поверхности римановой числовой сферы, которые определяются алгебраическими функциями. Теория функций на компактных римановых поверхностях обнаруживает интересные закономерности, такие, как теорема Римана — Роха и теорема Абеля. В наше время теория римановых поверхностей обобщается на обширную теорию комплексных многообразий произвольной размерности. Развитые для этих целей методы в свою очередь хорошо подходят для доказательства классических теорем. Поэтому мы приводим в этой главе краткое введение в теорию когомологий пучков.

Глава II, по существу, не зависит от гл. I. Нам нужны только § 1 (определение римановых поверхностей), первая часть § 6 (определение пучков), а также § 9 и 10 (дифференциальные формы).

## § 12. Группы когомологий

Целью этого параграфа является определение групп когомологий $H^1(X, \mathcal{F})$ для пучка $\mathcal{F}$ абелевых групп на топологическом пространстве $X$. Эти группы когомологий играют решающую роль в нашем дальнейшем изучении римановых поверхностей.

**12.1. Коцепи, коциклы, кограницы.** Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на $X$. Пусть задано открытое покрытие $X$, т. е. семейство $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ открытых подмножеств, такое, что $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Для $q = 0, 1, 2, \ldots$ мы определяем *q-ю группу коцепей* пучка $\mathcal{F}$ относительно $\mathfrak{U}$ как

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}).$$

Элементы $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ называются *q-коцепями*. Таким образом, $q$-коцепь есть семейство

$$(f_{i_0 \ldots i_q})_{i_0, \ldots, i_q \in I} \quad \text{с} \quad f_{i_0 \ldots i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q})$$

для всех $(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$. Сложение двух коцепей осуществляется покомпонентно. Определим теперь *операторы кограницы*

$$\delta\colon C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}),$$
$$\delta\colon C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

следующим образом:

(i) Для $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ пусть $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i, j \in I}$, где

$$g_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j).$$

Здесь при вычитании элементы $f_i$ и $f_j$ сужаются на пересечение $U_i \cap U_j$.

(ii) Для $(f_{ij})_{i, j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ пусть $\delta((f_{ij})) = (g_{ijk})$, где

$$g_{ijk} := f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Здесь члены в правой части сужаются на общую область определения $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Операторы кограницы являются гомоморфизмами групп. Положим

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{Ker}(C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})),$$
$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{Im}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

Элементы $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ называются *1-коциклами*. По определению, 1-коцепь $(f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ является коциклом тогда и только тогда, когда

$$(*) \qquad f_{ik} = f_{ij} + f_{jk} \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j \cap U_k$$

для всех $i, j, k \in I$. Из этого так называемого *коциклического соотношения* следует, что

$$f_{ii} = 0, \qquad f_{ij} = -f_{ji}.$$

Первое соотношение получается, если в $(*)$ положить $i = j = k$, второе — если $i = k$.

Элементы $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ называются *1-кограницами*. Всякая кограница является, в частности, коциклом. Кограницы называют также *разрешимыми коциклами*. Коцикл $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ разрешим тогда и только тогда, когда существует 0-коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, такая, что

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j \quad \text{для всех} \quad i, j \in I.$$

**12.2. Определение.** Факторгруппа

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B_1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

называется *первой группой когомологий* с коэффициентами в $\mathcal{F}$ относительно покрытия $\mathfrak{U}$.

Ее элементы называются классами когомологий; два коцикла, принадлежащие одному классу когомологий, называются *когомологичными*. Таким образом, два коцикла когомологичны тогда и только тогда, когда их разность является кограницей.

Группы $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ зависят от покрытия $\mathfrak{U}$. Чтобы получить группу когомологий, которая зависит только от $X$ и $\mathcal{F}$, переходят ко все более мелким покрытиям и берут предел.

Открытое покрытие $\mathfrak{V} = (V_k)_{k\in K}$ называется *более мелким*, чем покрытие $\mathfrak{U}$ (обозначается $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$), если каждое $V_k$ содержится по крайней мере в одном $U_i$. В этом случае существует отображение $\tau$: $K \to I$, такое, что

$$V_k \subset U_{\tau k} \quad \text{для всех} \quad k \in K.$$

При помощи этого отображения $\tau$ определим отображение

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}: Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

следующим образом: для $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ пусть $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}((f_{ij})) = (g_{kl})$ где

$$g_{kl} := f_{\tau k, \tau l} | V_k \cap V_l \quad \text{для всех} \quad k, l \in K.$$

Это отображение переводит кограницы в кограницы и индуцирует гомоморфизм $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ групп когомологий, который мы тоже обозначим через $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$.

**12.3. Лемма.** *Отображение*

$$t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

*не зависит от выбора измельчающего отображения* $\tau$: $K \to I$.

*Доказательство.* Пусть $\tilde{\tau}$: $K \to I$ — другое отображение с $V_k \subset U_{\tilde{\tau} k}$ для всех $k \in K$. Пусть $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и

$$g_{kl} := f_{\tau k, \tau l} | V_k \cap V_l, \qquad \tilde{g}_{kl} := f_{\tilde{\tau} k, \tilde{\tau} l} | V_k \cap V_l.$$

Нам надо показать, что коциклы $(g_{kl})$ и $(\tilde{g}_{kl})$ когомологичны. Так как $V_k \subset U_{\tau k} \cap U_{\tilde{\tau} k}$, то определены

$$h_k := f_{\tau k, \tilde{\tau} k} \big| V_k \in \mathcal{F}(V_k).$$

Над $V_k \cap V_l$ имеем

$$g_{kl} - \tilde{g}_{kl} = f_{\tau k,\ \tau l} - f_{\tilde{\tau} k,\ \tilde{\tau} l} = \\ = f_{\tau k,\ \tau l} + f_{\tau l,\ \tilde{\tau} k} - f_{\tau l,\ \tilde{\tau} k} - f_{\tilde{\tau} k,\ \tilde{\tau} l} = \\ = f_{\tau k,\ \tilde{\tau} k} - f_{\tau l,\ \tilde{\tau} l} = h_k - h_l.$$

Таким образом, коцикл $(g_{kl}) - (\tilde{g}_{kl})$ разрешим, ч. т. д.

**12.4. Лемма.** *Отображение*

$$t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}\colon H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

*инъективно.*

*Доказательство.* Пусть $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ — коцикл, образ которого в $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ разрешим. Надо показать, что тогда и сам $(f_{ij})$ разрешим.

Итак, пусть $f_{\tau k,\ \tau l} = g_k - g_l$ над $V_k \cap V_l$ с $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$. В $U_i \cap V_k \cap V_l$ имеем

$$g_k - g_l = f_{\tau k,\ \tau l} = f_{\tau k,\ i} + f_{i,\ \tau l} = f_{i,\ \tau l} - f_{i,\ \tau k},$$

и, значит, $f_{i,\ \tau k} + g_k = f_{i,\ \tau l} + g_l$. Тогда, по второй аксиоме пучка (см. определение 6.3), примененной к семейству открытых множеств $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$, существуют $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$ с

$$h_i = f_{i,\ \tau k} + g_k \quad \text{над} \quad U_i \cap V_k.$$

Для найденных таким образом элементов $h_i$ над $U_i \cap U_j \cap V_k$ имеем

$$f_{ij} = f_{i,\ \tau k} + f_{\tau k,\ j} = f_{i,\ \tau k} + g_k - f_{j,\ \tau k} - g_k = h_i - h_j.$$

Так как $k$ было произвольным, то из аксиомы I пучка следует, что это равенство справедливо над $U_i \cap U_j$, т. е. коцикл $(f_{ij})$ разрешим уже для покрытия $\mathfrak{U}$, ч. т. д.

**12.5. Определение** $H^1(X, \mathcal{F})$. Для трех открытых покрытий $\mathfrak{W} < \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ имеем

$$t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}} \circ t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} = t_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{U}}.$$

Поэтому на дизъюнктном объединении всех $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, где $\mathfrak{U}$ пробегает открытые покрытия $X$, можно ввести следующее отношение эквивалентности: два класса когомологий $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ называются эквивалентными, когда существует открытое покрытие $\mathfrak{V}$ с $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}'$, такое, что $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) = t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta)$. Множество всех классов эквивалентности есть так называемый *индуктивный предел* групп когомологий $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Этот предел называется первой группой когомологий пространства $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$ и обозна-

чается

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Big(\bigcup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\Big)\Big/\sim.$$

Сложение в $H^1(X, \mathcal{F})$ определяется следующим образом. Пусть элементы $x, y \in H^1(X, \mathcal{F})$ определяются классами $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ соответственно. Пусть $\mathfrak{V}$ — общее измельчение для $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$. Тогда $x + y \in H^1(X, \mathcal{F})$ есть класс эквивалентности для $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}(\xi) + t^{\mathfrak{U}'}_{\mathfrak{V}}(\eta) \in H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$. Легко видеть, что это определение не зависит от выбора представителей и что $H^1(X, \mathcal{F})$ превращается в абелеву группу. Если $\mathcal{F}$ — пучок векторных пространств, то естественным образом $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ и $H^1(X, \mathcal{F})$ — тоже векторные пространства.

По лемме 12.4, для всякого открытого покрытия $X$ каноническое отображение

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$$

инъективно. Отсюда, в частности, следует, что

Равенство $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = 0$ для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ пространства $X$.

**12.6. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $\mathcal{E}$ — пучок дифференцируемых функций на $X$. Тогда $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$.*

*Доказательство.* Мы докажем это утверждение в предположении, что $X$ имеет счетную топологию (это предположение на самом деле всегда выполняется — см. § 23).

Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — произвольное открытое покрытие $X$. Тогда имеется подчиненное ему разбиение единицы, т. е. семейство $(\psi_i)_{i \in I}$ функций $\psi_i \in \mathcal{E}(X)$ со следующими свойствами (см. приложение):

(i) $\operatorname{Supp}(\psi_i) \subset U_i$;

(ii) каждая точка в $X$ обладает окрестностью, которая пересекается лишь с конечным числом множеств $\operatorname{Supp}(\psi_i)$;

(iii) $\sum_{i \in I} \psi_i = 1$.

Мы покажем теперь, что $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) = 0$, т. е. всякий коцикл $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E})$ разрешим.

Функции $\psi_j f_{ij}$, определенные на $U_i \cap U_j$, можно продолжить нулем до дифференцируемых функций на всем $U_i$ и рассматривать как элементы из $\mathcal{E}(U_i)$. Пусть

$$g_i := \sum_{j \in I} \psi_j f_{ij}.$$

Согласно (ii), эта сумма в окрестности каждой точки в $U_i$ содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых

и, таким образом, представляет собой элемент $g_i \in \mathscr{E}(U_i)$. Для $i, j \in I$ на $U_i \cap U_j$ имеем

$$g_i - g_j = \sum_{k \in I} \psi_k f_{ik} - \sum_{k \in I} \psi_k f_{jk} = \sum_k \psi_k (f_{ik} - f_{jk}) =$$
$$= \sum_k \psi_k (f_{ik} + f_{kj}) = \sum_k \psi_k f_{ij} = f_{ij}$$

и, значит, $(f_{ij})$ есть кограница, ч. т. д.

*Замечание.* Точно так же доказывается, что на римановой поверхности $X$ первые группы когомологий с коэффициентами в пучках $\mathscr{E}^{(1)}$, $\mathscr{E}^{1,0}$, $\mathscr{E}^{0,1}$ и $\mathscr{E}^{(2)}$ равны нулю.

**12.7. Предложение.** *Пусть $X$ — односвязная риманова поверхность. Тогда*

(a) $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$,

(b) $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.

Здесь $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Z}$ обозначают соответственно пучки локально постоянных функций со значениями в комплексных, соотв. в целых числах, см. (6.4 e).

*Доказательство.* (a) Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие $X$ и $(c_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$. Так как $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{E})$ и $H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{E}) = 0$, то существует коцепь $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{E})$, такая, что

$$c_{ij} = f_i - f_j \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Из $dc_{ij} = 0$ следует, что $df_i = df_j$ на $U_i \cap U_j$, и, значит, существует глобальная дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ с $\omega | U_i = df_i$. Так как $ddf_i = 0$, то $\omega$ замкнута. Поскольку $X$ односвязна, то, согласно (10.7), существует $f \in \mathscr{E}(X)$, такая, что $df = \omega$. Мы полагаем

$$c_i := f_i - f | U_i.$$

Так как $dc_i = df_i - df = \omega - \omega = 0$ на $U_i$, то $c_i$ — локально постоянные функции, т. е. $(c_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$. Над $U_i \cap U_j$ имеем

$$c_{ij} = f_i - f_j = (f_i - f) - (f_j - f) = c_i - c_j$$

и, значит, коцикл $(c_{ij})$ разрешим.

(b) Пусть $(a_{jk}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$. Согласно (a), существует коцепь $(c_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$ с

$$a_{jk} = c_j - c_k \quad \text{над} \quad U_j \cap U_k.$$

Так как $\exp(2\pi i a_{jk}) = 1$, то $\exp(2\pi i c_j) = \exp(2\pi i c_k)$ над пересечением $U_j \cap U_k$. Так как $X$ связно, то существует число $b \in \mathbb{C}^*$, такое, что

$$b = \exp(2\pi i c_j) \quad \text{для всех} \quad j \in I.$$

Пусть $c \in \mathbb{C}$ таково, что $\exp(2\pi ic) = b$ и

$$a_j := c_j - c.$$

Так как $\exp(2\pi ia_j) = \exp(2\pi ic_j) \cdot \exp(-2\pi ic) = 1$, то $a_j$ — целочисленные функции, т. е. $(a_j) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$. Кроме того,

$$a_{jk} = c_j - c_k = (c_j - c) - (c_k - c) = a_j - a_k,$$

т. е. коцикл $(a_{jk})$ лежит в $B^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$, ч. т. д.

Следующее предложение показывает, что при определенных обстоятельствах для вычисления $H^1(X, \mathcal{F})$ можно обойтись одним-единственным покрытием.

**12.8. Предложение** (Лере). *Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве $X$ и $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$, такое, что $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i \in I$. Тогда*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

В таком случае $\mathfrak{U}$ называется *покрытием Лере* (первого порядка) относительно $\mathcal{F}$.

*Доказательство.* Достаточно показать, что для всякого открытого покрытия $\mathfrak{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in A}$ с $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ отображение $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}\colon H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ является изоморфизмом. Согласно (12.4), это отображение инъективно.

Пусть $\tau\colon A \to I$ — такое отображение, что $V_\alpha \subset U_{\tau\alpha}$ для всех $\alpha \in A$. Чтобы доказать сюръективность $t^{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{V}}$, нам надо для каждого заданного коцикла $(f_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ найти такой коцикл $(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, что коцикл

$$(F_{\tau\alpha, \tau\beta}) - (f_{\alpha\beta})$$

разрешим относительно $\mathfrak{V}$.

Семейство $(U_i \cap V_\alpha)_{\alpha \in A}$ является открытым покрытием $U_i$. Мы обозначим его через $U_i \cap \mathfrak{V}$. По условию, $H^1(U_i \cap \mathfrak{V}, \mathcal{F}) = 0$, т. е. существуют $g_{i\alpha} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_\alpha)$, такие, что

$$f_{\alpha\beta} = g_{i\alpha} - g_{i\beta} \quad \text{над} \quad U_i \cap V_\alpha \cap V_\beta.$$

Так как тем самым над $U_i \cap U_j \cap V_\alpha \cap V_\beta$ будет

$$g_{j\alpha} - g_{i\alpha} = g_{j\beta} - g_{i\beta},$$

то, по второй аксиоме пучка, существуют элементы $F_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ с

$$F_{ij} = g_{j\alpha} - g_{i\alpha} \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j \cap V_\alpha.$$

Ясно, что $(F_{ij})$ удовлетворяет коциклическому соотношению и, таким образом, лежит в $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Положим $h_\alpha := g_{\tau\alpha, \alpha} | V_\alpha \in$

$\in \mathcal{F}(V_\alpha)$. Тогда над $V_\alpha \cap V_\beta$ имеем

$$F_{\tau\alpha,\,\tau\beta} - f_{\alpha\beta} = (g_{\tau\beta,\,\alpha} - g_{\tau\alpha,\,\alpha}) - (g_{\tau\beta,\,\alpha} - g_{\tau\beta,\,\beta}) = \\ = g_{\tau\beta,\,\beta} - g_{\tau\alpha,\,\alpha} = h_\beta - h_\alpha$$

и, значит, $(F_{\tau\alpha,\,\tau\beta}) - (f_{\alpha\beta})$ разрешим, ч. т. д.

**12.9. Пример.** В качестве применения теоремы Лере мы хотим показать, что

$$H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Пусть $U_1 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ и $U_2 := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ — соответственно положительная и отрицательная вещественные полуоси. Тогда $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ — открытое покрытие $\mathbb{C}^*$ и, согласно (12.7), $H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0$, так как $U_i$ звездны и, значит, односвязны. Поэтому $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$.

Так как коцикл $(a_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ альтернированный, т. е. $a_{ii} = 0$ и $a_{ij} = -a_{ji}$, то он вполне определяется заданием $a_{12}$ и, таким образом, $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(U_1 \cap U_2)$. Пересечение $U_1 \cap U_2$ распадается на две связные компоненты — верхнюю и нижнюю полуплоскость, и, таким образом, $\mathbb{Z}(U_1 \cap U_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Так как $U_i$ связны, то $\mathbb{Z}(U_i) \cong \mathbb{Z}$ и, значит, $C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Оператор кограницы $\delta$: $C^0(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \to Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$ благодаря этим изоморфизмам задается условием

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad (b_1, b_2) \mapsto (b_2 - b_1, b_2 - b_1).$$

Таким образом, кограницы отождествляются с подгруппой $B \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ всех элементов $(a_1, a_2)$, таких, что $a_1 = a_2$. Поэтому $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/B \cong \mathbb{Z}$, ч. т. д.

Таким же способом доказывается, что $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$.

**12.10. Нулевая группа когомологий.** Пусть $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на топологическом пространстве $X$ и $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$. Положим

$$Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \operatorname{Ker}\left(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})\right),$$
$$B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := 0,$$
$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Из определения $\delta$ следует, что 0-коцепь $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ принадлежит $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $f_i \mid U_i \cap U_j = f_j \mid U_i \cap U_j$ для всех $i, j \in I$. Тогда, по второй аксиоме пучка, элементы $f_i$ объединяются в один глобальный элемент $f \in \mathcal{F}(X)$ и естественным образом получается изоморфизм

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Таким образом, группы $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ совсем не зависят от $\mathfrak{U}$. По определению,

$$H^0(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X).$$

# § 13. Лемма Дольбо

В этом параграфе мы решаем неоднородное уравнение Коши — Римана $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$, где $g$ — заданная дифференцируемая функция в круге $X$. Затем это используется для доказательства тривиальности группы когомологий $H^1(X, \mathcal{O})$.

**13.1. Лемма.** *Для всякой функции* $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ *с компактным носителем существует функция* $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$, *такая, что*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

*Доказательство.* Определим функцию $f$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ формулой

$$f(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}.$$

Так как подынтегральное выражение имеет особенность в точке $z = \zeta$, то надо еще показать, что этот интеграл существует и дифференцируемым образом зависит от $\zeta$. Проще всего это сделать при помощи замены переменной интегрирования и введения полярных координат $r$, $\theta$, а именно

$$z = \zeta + re^{i\theta}.$$

Так как при интегрировании $\zeta$ рассматривается как константа, то

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i\, dx \wedge dy = -2ir\, dr \wedge d\theta$$

и, значит,

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{g(\zeta + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} r\, dr\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint g(\zeta + re^{i\theta})\, e^{-i\theta}\, dr\, d\theta.$$

Так как $g$ имеет компактный носитель, то интегрировать надо только по прямоугольнику $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ с достаточно большим $R$ и еще можно дифференцировать под знаком интеграла, т. е. $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ и

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint \frac{\partial g(\zeta + re^{i\theta})}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\theta}\, dr\, d\theta.$$

Далее, избавляясь от полярных координат, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon} \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{z} dz \wedge d\bar{z},$$

где $B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}:\ \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R\}$. Так как

$$\frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{z} = \frac{\partial g(\zeta + z)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{g(\zeta + z)}{z} \right)$$

при $z \neq 0$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{g(\zeta + z)}{z} \right) dz \wedge d\bar{z} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon} d\omega,$$

где дифференциальная форма

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{g(\zeta + z)}{z} dz$$

(здесь $z$ рассматривается как переменная, а $\zeta$ — как константа). По теореме Стокса,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon} d\omega = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \omega = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|z| = \varepsilon} \omega.$$

Параметризуя окружность $|z| = \varepsilon$ при помощи $z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, получаем, что

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta.$$

Здесь интеграл представляет как раз среднее значение функции $g$ на окружности $\zeta + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \quad \theta \leqslant 2\pi$. Так как $g$ непрерывна, то при $\varepsilon \to 0$ оно сходится к $g(\zeta)$, т. е. $\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta) = g(\zeta)$, ч. т. д.

В следующем предложении мы освобождаемся от предположения, что $g$ имеет компактный носитель.

**13.2. Предложение.** *Пусть* $X := \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$, *и* $g \in \mathscr{E}(X)$. *Тогда существует* $f \in \mathscr{E}(X)$, *такая, что*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g.$$

Это предложение является частным случаем так называемой леммы Дольбо из теории функций многих комплексных переменных, см. [31].

*Доказательство.* В этом случае решение нельзя задать просто в виде интеграла, как в (13.1), поскольку в общем случае интеграл не будет сходиться. Поэтому мы воспользуемся методом исчерпания и сведем (13.2) к (13.1).

Пусть $0 < R_0 < R_1 < \ldots < R_n$ — последовательность радиусов, $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = R$ и

$$X_n := \{z \in \mathbb{C}: \ |z| < R_n\}.$$

Существуют функции $\psi_n \in \mathscr{E}(X)$ с компактными носителями $\operatorname{Supp}(\psi_n) \subset X_{n+1}$ и $\psi_n | X_n = 1$. Мы полагаем, что функции $\psi_n g$, которые равны нулю вне $X_{n+1}$, продолжены нулем на всю $\mathbb{C}$. Согласно (13.1), существуют функции $f_n \in \mathscr{E}(X)$ с

$$\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = \psi_n g \quad \text{на} \quad X.$$

Теперь индукцией по $n$ заменим последовательность $(f_n)$ последовательностью $(\tilde{f}_n)$ так, что для всех $n \geqslant 1$ будет

(i) $\partial \tilde{f}_n / \partial \bar{z} = g$ на $X_n$,

(ii) $\| \tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n \|_{X_{n-1}} \leqslant 2^{-n}$

(как обычно, мы обозначаем через $\|f\|_K := \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$ sup-норму).

Положим $\tilde{f}_1 := f_1$. Пусть $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ уже построены. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_{n+1} - \tilde{f}_n) = 0 \quad \text{на} \quad X_n$$

и, значит, $f_{n+1} - \tilde{f}_n$ голоморфна в $X_n$. Поэтому существует многочлен $P$ (например, отрезок ряда Тейлора для $f_{n+1} - \tilde{f}_n$), такой, что

$$\| f_{n+1} - \tilde{f}_n - P \|_{X_{n-1}} \leqslant 2^{-n}.$$

Положим $\tilde{f}_{n+1} := f_{n+1} - P$; тогда условие (ii) будет выполнено. Кроме того, на $X_{n+1}$ имеем

$$\frac{\partial \tilde{f}_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \psi_{n+1} g = g,$$

т. е. выполнено также условие (i). Так как каждая точка $z \in X$ содержится почти во всех $X_n$, то существует предельное значение

$$f(z) := \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(z).$$

Над $X_n$ функция $f$ представляется в виде

$$f = \tilde{f}_n + \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1} - \tilde{f}_k).$$

Функции $\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k$ при $k \geqslant n$ голоморфны в $X_n$, так как $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k)=0$. Согласно (ii), ряд

$$F_n := \sum_{k=n}^{\infty} (\tilde{f}_{k+1}-\tilde{f}_k)$$

равномерно сходится на $X_n$ и, значит, $F_n$ там голоморфна. Поэтому $f=\tilde{f}_n+F_n$ для каждого $n$ бесконечно дифференцируема на $X_n$ и, значит, $f \in \mathscr{E}(X)$. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial \bar{z}} = g \quad \text{на} \quad X_n$$

для всех $n$ и, значит, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ на всем $X$, ч. т. д.

*Замечание.* Решение уравнения $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ определено, разумеется, не однозначно, а с точностью до голоморфного слагаемого.

**13.3. Следствие.** *Пусть* $X := \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$. *Тогда для всякой* $g \in \mathscr{E}(X)$ *существует функция* $f \in \mathscr{E}(X)$, *такая, что* $\Delta f = g$.

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}}$ — оператор Лапласа.

*Доказательство.* Пусть $f_1 \in \mathscr{E}(X)$ есть функция с $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = g$ и $f_2 \in \mathscr{E}(X)$ — функция с $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \bar{f}_1$. Тогда $f := \frac{1}{4}\bar{f}_2$ удовлетворяет уравнению $\Delta f = g$, так как

$$\Delta f = \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial z\, \partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\overline{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}}\right) = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = g.$$

**13.4. Предложение.** *Пусть* $X := \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$, $0 < R \leqslant \infty$. *Тогда* $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

*Доказательство.* Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)$ — открытое покрытие $X$ и $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ — коцикл. Так как $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{E})$ и $H^1(X, \mathscr{E}) = 0$, то существует коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{E})$ с

$$f_{ij} = g_i - g_j \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_{ij} = 0$, то $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_j$ на $U_i \cap U_j$ и, значит, существует глобальная функция $h \in \mathscr{E}(X)$ с $h \mid U_i = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}}$. Согласно

(13.2), найдется функция $g \in \mathcal{E}(X)$ с $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = h$. Положим

$$f_i := g_i - g.$$

Так как $\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$, то $f_i$ голоморфны и, значит, $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Кроме того, на $U_i \cap U_j$ имеем

$$f_i - f_j = g_i - g_j = f_{ij},$$

т. е. коцикл $(f_{ij})$ разрешим, ч. т. д.

**13.5. Предложение.** *Для римановой числовой сферы имеем*

$$H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = 0.$$

*Доказательство.* Положим $U_1 := \mathbb{P}_1 \setminus \infty$ и $U_2 := \mathbb{P}_1 \setminus 0$. Так как $U_1 = \mathbb{C}$, а $U_2$ биголоморфно эквивалентно $\mathbb{C}$, то, по (13.4), $H^1(U_i, \mathcal{O}) = 0$. Таким образом, $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ есть покрытие Лере для $\mathbb{P}_1$ и $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ согласно (12.8). Итак, надо показать, что всякий коцикл $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ разрешим. Для этого, очевидно, достаточно найти функции $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, такие, что

$$f_{12} = f_1 - f_2 \quad \text{на} \quad U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*.$$

Пусть

$$f_{12}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

есть разложение Лорана для $f_{12}$ в $\mathbb{C}^*$. Положим

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{и} \quad f_2(z) := -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Тогда $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ и $f_1 - f_2 = f_{12}$, ч. т. д.

## § 14. Теорема конечности

В этом параграфе мы докажем, что на компактной римановой поверхности $X$ группа когомологий $H^1(X, \mathcal{O})$ является конечномерным $\mathbb{C}$-векторным пространством. Ее размерность называется родом поверхности $X$. Из теоремы конечности следует, между прочим, что на компактной римановой поверхности всегда существуют непостоянные мероморфные функции. Имея в виду последующие применения в гл. III, мы проводим наши исследования для относительно компактных подмножеств не обязательно компактных римановых поверхностей.

**14.1. $L^2$-норма голоморфных функций.** Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Для голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(D)$ определим $L^2$-норму формулой

$$\|f\|_{L^2(D)} := \left(\iint_D |f(x+iy)|^2 \, dx\, dy\right)^{1/2}.$$

Таким образом, $\|f\|_{L^2(D)} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Если $\|f\|_{L^2(D)} < \infty$, то $f$ называется квадратично интегрируемой в $D$. Векторное пространство всех квадратично интегрируемых голоморфных в $D$ функций мы обозначаем $L^2(D, \mathcal{O})$. Если

$$\operatorname{Vol}(D) := \iint_D dx\, dy < \infty,$$

то для всякой ограниченной функции $f \in \mathcal{O}(D)$ имеем

$$\|f\|_{L^2(D)} \leqslant \sqrt{\operatorname{Vol}(D)}\, \|f\|_D,$$

где $\|f\|_D := \sup\{|f(z)|: z \in D\}$ обозначает sup-норму.

Для $f, g \in L^2(D, \mathcal{O})$ определяется скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle := \iint_D f\bar{g}\, dx\, dy.$$

Интеграл существует, так как для всех $z \in D$

$$|f(z)\overline{g(z)}| \leqslant \frac{1}{2}(|f(z)|^2 + |g(z)|^2).$$

С этим скалярным произведением $L^2(D, \mathcal{O})$ становится унитарным векторным пространством и, значит, в нем, в частности, определено понятие ортогональности.

Пусть теперь $B = B(a, r) := \{z \in \mathbb{C}: |z-a| < r\}$ — круг с центром $a$ и радиусом $r > 0$. Тогда мономы $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\varphi_n(z) := (z-a)^n,$$

образуют ортогональную систему в $L^2(B, \mathcal{O})$ с

$$\|\varphi_n\|_{L^2(B)} = \frac{\sqrt{\pi} r^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

что легко проверить введением полярных координат. Если $f \in L^2(B, \mathcal{O})$ и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

есть разложение Тейлора для $f$ в точке $a$, то по теореме Пифагора

$$(*) \qquad \|f\|^2_{L^2(B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1} |c_n|^2.$$

**14.2. Предложение.** *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $r > 0$ и*

$$D_r := \{z \in D\colon\ B(z, r) \subset D\}$$

*— множество всех точек в $D$, у которых расстояние до границы $\geqslant r$. Тогда для всякой функции $f \in L^2(D, \mathcal{O})$*

$$\|f\|_{D_r} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

*Доказательство.* Пусть $a \in D_r$ и $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$ есть тейлоровское разложение в точке $a$. Из (*) следует, что

$$|f(a)| = |c_0| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(B(a, r))} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{L^2(D)}.$$

Так как $\|f\|_{D_r} = \sup\{|f(a)|\colon\ a \in D_r\}$, то отсюда вытекает утверждение.

Из предложения 14.2, в частности, следует, что если $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность Коши в $L^2(D, \mathcal{O})$, то она сходится равномерно на каждом компакте в $D$ и, значит, имеет пределом голоморфную функцию. Поэтому $L^2(D, \mathcal{O})$ полно, т. е. является гильбертовым пространством.

Следующую лемму можно рассматривать как некое обобщение леммы Шварца.

**14.3. Лемма.** *Пусть $D' \Subset D$ — открытые подмножества в $\mathbb{C}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое векторное подпространство $A \subset L^2(D, \mathcal{O})$ конечной коразмерности, такое, что*

$$\|f\|_{L^2(D')} \leqslant \varepsilon \|f\|_{L^2(D)} \quad \text{для всех} \quad f \in A.$$

*Доказательство.* Так как $\overline{D'}$ компактно принадлежит $D$, то найдутся $r > 0$ и конечное число точек $a_1, \ldots, a_k \in D$ со следующими свойствами:

(i) $B(a_j, r) \subset D$ для $j = 1, \ldots, k$,

(ii) $D' \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} B(a_j, r/2)$.

Выберем $n$ настолько большим, что $2^{-n-1}k \leqslant \varepsilon$. Пусть $A$ есть множество всех функций $f \in L^2(D, \mathcal{O})$, которые в каждой точке $a_j$ имеют нуль по крайней мере $n$-го порядка. Тогда $A$ есть замкнутое векторное подпространство в $L^2(D, \mathcal{O})$ коразмерности $\leqslant kn$.

Пусть $f \in A$. Тогда $f$ в точке $a_j$ имеет тейлоровское разложение

$$f(z) = \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu (z - a_j)^\nu.$$

Для всех $\rho \leqslant r$ имеем

$$\|f\|^2_{L^2(B(a_j,\,\rho))} = \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\pi\rho^{2\nu+2}}{\nu+1} |c_\nu|^2,$$

откуда следует, что

$$\|f\|_{L^2(B(a_j,\,r/2))} \leqslant 2^{-n-1} \|f\|_{L^2(B(a_j,\,r))}.$$

Согласно (i) и (ii),

$$\|f\|_{L^2(B(a_j,\,r))} \leqslant \|f\|_{L^2(D)}$$

и

$$\|f\|_{L^2(D')} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|f\|_{L^2(B(a_j,\,r/2))},$$

а значит, $\|f\|_{L^2(D')} \leqslant k \cdot 2^{-n-1} \|f\|_{L^2(D)} \leqslant \varepsilon \|f\|_{L^2(D)}$, ч. т. д.

**14.4. Квадратично интегрируемые коцепи.** Пусть $X$ — риманова поверхность. Выберем конечное семейство $(U_i^*, z_i)$, $i=1, \ldots, n$, карт на $X$, таких, что $z_i(U_i^*) \subset \mathbb{C}$ суть круги. Мы не предполагаем, что $\mathfrak{U}^* = (U_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть покрытие $X$.

Пусть $U_i \subset U_i^*$ — открытые подмножества и $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. В группах коцепей $C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ и $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ на пространстве

$$|\mathfrak{U}| := U_1 \cup \ldots \cup U_n$$

мы следующим образом введем $L^2$-норму:

(i) для $\eta = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ пусть

$$\|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_i \|f_i\|^2_{L^2(U_i)};$$

(ii) для $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ пусть

$$\|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} := \sum_{i,\,j} \|f_{ij}\|^2_{L^2(U_i \cap U_j)}.$$

При этом нормы $f_i$ и $f_{ij}$ вычисляются относительно карты $(U_i^*, z_i)$, т. е.

$$\|f_i\|_{L^2(U_i)} := \|f_i \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i))},$$
$$\|f_{ij}\|_{L^2(U_i \cap U_j)} := \|f_{ij} \circ z_i^{-1}\|_{L^2(z_i(U_i \cap U_j))}.$$

Коцепи с конечными нормами образуют векторные подпространства $C^q_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \subset C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, $q = 0, 1$, которые являются гильбертовыми пространствами. Коциклы из $C^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ образуют замкнутое векторное подпространство, которое обозначается $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

**14.5.** Пусть $V_i \Subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$, — относительно компактные открытые подмножества и $\mathfrak{B} = (V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$; сокращенно мы это

записываем как $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$. Для каждой коцепи $\xi \in C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ имеем $\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} < \infty$. Из леммы 14.3 непосредственно следует такое утверждение.

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое векторное подпространство $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ конечной коразмерности, такое, что

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})} \leqslant \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{для всех} \quad \xi \in A.$$

**14.6. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $\mathfrak{U}^*$ — конечное семейство карт на $X$, как в* (14.4). *Пусть, далее, заданы $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$. Тогда существует константа $C > 0$, такая, что: для каждого $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$ существуют элементы $\zeta \in \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ и $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$, такие, что*

$$\zeta = \xi + \delta\eta \quad \textit{над} \quad \mathfrak{W}$$

*и*

$$\max(\|\zeta\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leqslant C\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{V})}.$$

*Доказательство.* (a) Пусть задан $\xi = (f_{ij}) \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$. Мы построим сначала элементы $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ и $\eta \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ с $\zeta = = \xi + \delta\eta$ над $\mathfrak{W}$, не заботясь об оценке.

По предложению 12.6, существует коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$ с

$$f_{ij} = g_j - g_i \quad \text{на} \quad V_i \cap V_j.$$

Так как $\bar{\partial} f_{ij} = 0$, то $\bar{\partial} g_i = \bar{\partial} g_j$ на $V_i \cap V_j$ и, значит, существует дифференциальная форма $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(|\mathfrak{V}|)$ с $\omega | V_i = \bar{\partial} g_i$. Так как $|\mathfrak{W}| \Subset |\mathfrak{V}|$, то найдется функция $\psi \in \mathcal{E}(X)$ с

$$\operatorname{Supp}(\psi) \subset |\mathfrak{V}| \quad \text{и} \quad \psi \,|\, |\mathfrak{W}| = 1.$$

Поэтому $\psi\omega$ можно рассматривать как элемент $\mathcal{E}(|\mathfrak{U}^*|)$. По предложению 13.2, существуют функции $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ с

$$\bar{\partial} h_i = \psi\omega \quad \text{на} \quad U_i^*.$$

Так как $\bar{\partial} h_i = \bar{\partial} h_j$ на $U_i^* \cap U_j^*$, то

$$F_{ij} := h_j - h_i \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*).$$

Положим $\zeta := (F_{ij}) | \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$, то $\zeta \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.

На $W_i$ имеем $\bar{\partial} h_i = \psi\omega = \omega = \bar{\partial} g_i$, и, значит, $h_i - g_i$ голоморфна на $W_i$. Так как, кроме того, $h_i - g_i$ на $W_i$ ограничена, то

$$\eta := (h_i - g_i) | \mathfrak{W} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Далее, $F_{ij} - f_{ij} = (h_j - g_j) - (h_i - g_i)$ на $W_i \cap W_j$, и, значит,

$$\zeta - \xi = \delta\eta \quad \text{на} \quad \mathfrak{W}.$$

(b) Чтобы получить оценку, мы рассмотрим гильбертово пространство

$$H := Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z^1_{L^2}(\mathfrak{B}, \mathcal{O}) \times C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

с нормой

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := (\|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{U})} + \|\xi\|^2_{L^2(\mathfrak{B})} + \|\eta\|^2_{L^2(\mathfrak{W})})^{1/2}.$$

Пусть $L \subset H$ есть подпространство

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H: \zeta = \xi + \delta\eta \text{ над } \mathfrak{W}\}.$$

Тогда $L$ замкнуто в $H$ и, значит, само является гильбертовым пространством. Согласно части (а), непрерывное линейное отображение

$$\pi: L \to Z^1_{L^2}(\mathfrak{B}, \mathcal{O}), \quad (\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi,$$

сюръективно. По теореме Банаха, отображение $\pi$ открыто (см. приложение В, пп. 6, 7), и, значит, существует константа $C > 0$, такая, что для каждого $\xi \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{B}, \mathcal{O})$ найдется $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$ с $\pi(x) = \xi$ и $\|x\|_H \leqslant C \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{B})}$. Эта константа удовлетворяет условиям предложения.

**14.7. Лемма.** *В обозначениях леммы* 14.6, *существует конечномерное векторное подпространство* $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ *со следующим свойством:*

*Для каждого* $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ *найдутся элементы* $\sigma \in S$ *и* $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$, *такие, что*

$$\sigma = \xi + \delta\eta \quad \text{над} \quad \mathfrak{W}.$$

*Замечание.* Лемма означает, что естественное отображение сужения

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

имеет конечномерный образ.

*Доказательство.* Пусть $C$ — константа из леммы 14.6 и $\varepsilon := 1/2C$. Согласно (14.5), имеется замкнутое векторное подпространство $A \subset Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ конечной коразмерности, такое, что

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{B})} \leqslant \varepsilon \|\xi\|_{L^2(\mathfrak{U})} \quad \text{для всех} \quad \xi \in A.$$

Пусть $S$ есть ортогональное дополнение к $A$ в $Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, т. е. $A \oplus S = Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Пусть задан произвольный $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Так как $\mathfrak{B} \Subset \mathfrak{U}$, то

$$\|\xi\|_{L^2(\mathfrak{B})} =: M < \infty.$$

Согласно (14.6), имеются элементы $\zeta_0 \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ и $\eta_0 \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathfrak{G})$, такие, что

$$\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0 \quad \text{над} \quad \mathfrak{W}$$

и $\|\zeta_0\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leqslant CM$, $\|\eta_0\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leqslant CM$. Пусть

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0, \quad \xi_0 \in A, \quad \sigma_0 \in S,$$

есть ортогональное разложение.

Теперь мы построим индукцией элементы

$$\zeta_\nu \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G}), \quad \eta_\nu \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathfrak{G}), \quad \xi_\nu \in A, \quad \sigma_\nu \in S$$

со следующими свойствами:

(i) $\zeta_\nu = \xi_{\nu-1} + \delta\eta_\nu$ над $\mathfrak{W}$,

(ii) $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$,

(iii) $\|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leqslant 2^{-\nu}CM$, $\|\eta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leqslant 2^{-\nu}CM$.

*Шаг индукции* $\nu \longrightarrow \nu+1$. Так как $\zeta_\nu = \xi_\nu + \sigma_\nu$ — ортогональное разложение, то

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leqslant \|\zeta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leqslant 2^{-\nu}CM$$

и, значит,

$$\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})} \leqslant \varepsilon \|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})} \leqslant 2^{-\nu}\varepsilon CM \leqslant 2^{-\nu-1}M.$$

По лемме 14.6, существуют элементы $\zeta_{\nu+1} \in Z^1_{L^2}(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ и $\eta_{\nu+1} \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathfrak{G})$, такие, что

$$\zeta_{\nu+1} = \xi_\nu + \delta\eta_{\nu+1} \quad \text{над} \quad \mathfrak{W}$$

и

$$\max(\|\zeta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \quad \|\eta_{\nu+1}\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leqslant 2^{-\nu-1}CM.$$

Пусть $\zeta_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} + \sigma_{\nu+1}$, $\xi_{\nu+1} \in A$, $\sigma_{\nu+1} \in S$, есть ортогональное разложение. Тем самым шаг индукции сделан.

Объединяя равенство $\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0$ с равенствами (i) и (ii) до $\nu = k$, мы получаем, что

$$(*) \qquad \xi_k + \sum_{\nu=0}^{k} \sigma_\nu = \xi + \delta\left(\sum_{\nu=0}^{k} \eta_\nu\right) \quad \text{над} \quad \mathfrak{W}.$$

Из (ii) и (iii) следует, что

$$\max(\|\xi_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\sigma_\nu\|_{L^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_\nu\|_{L^2(\mathfrak{W})}) \leqslant 2^{-\nu}CM.$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = 0$ и ряды

$$\sigma := \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu \in S,$$

$$\eta := \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu \in C^0_{L^2}(\mathfrak{W}, \mathfrak{G})$$

сходятся. Ввиду (*), $\sigma = \xi + \delta\eta$ над $\mathfrak{W}$, ч. т. д.

*Замечание.* Используя более сильные средства функционального анализа, доказательство можно было бы провести короче (см. доказательство предложения 29.13).

**14.8.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $Y \subset X$ — открытое подмножество и $\mathcal{F}$ — пучок абелевых групп на $X$. Для каждого открытого покрытия $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ пространства $X$ семейство $\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$ является открытым покрытием $Y$ и имеет место естественное отображение сужения $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$, индуцирующее гомоморфизм $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{F})$. Эти гомоморфизмы по всем $\mathfrak{U}$ порождают гомоморфизм сужения

$$H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(Y, \mathcal{F}).$$

Ясно, что для открытых множеств $Y \subset Y' \subset X$ гомоморфизм $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(Y, \mathcal{F})$ является композицией гомоморфизмов $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(Y', \mathcal{F})$ и $H^1(Y', \mathcal{F}) \to H^1(Y, \mathcal{F})$.

**14.9. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y_1 \Subset Y_2 \subset X$ — ее открытые подмножества. Тогда гомоморфизм сужения*

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \to H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

*имеет конечномерный образ.*

*Доказательство.* Существует конечное семейство карт $(U_i^*, z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ на $X$ и относительно компактные открытые подмножества $W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*$ со следующими свойствами:

(i) $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i =: Y' \Subset Y'' := \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset Y_2$,

(ii) все $z_i(U_i^*)$, $z_i(U_i)$, $z_i(W_i)$ суть круги в $\mathbb{C}$.

Пусть $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $\mathfrak{W} := (W_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. По лемме 14.7 отображение сужения $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$ имеет конечномерный образ. По предложению 13.4, $H^1(U_i, \mathcal{O}) = H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$, и, значит, по теореме Лере 12.8, $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = H^1(Y'', \mathcal{O})$ и $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) = H^1(Y', \mathcal{O})$. Так как отображение сужения $H^1(Y_2, \mathcal{O}) \to H^1(Y_1, \mathcal{O})$ разлагается в

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \to H^1(Y'', \mathcal{O}) \to H^1(Y', \mathcal{O}) \to H^1(Y_1, \mathcal{O}),$$

то из этого следует утверждение предложения.

**14.10. Следствие.** *Для всякой компактной римановой поверхности $X$ имеем*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty.$$

*Доказательство.* Так как $X$ компактна, то в предыдущем предложении можно взять $Y_1 = Y_2 = X$.

**14.11. Определение.** Для компактной римановой поверхности $X$ число
$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$$
называется *родом* поверхности $X$.

По предложению 13.5, риманова числовая сфера $\mathbb{P}_1$ имеет род нуль.

**14.12. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y \Subset X$ — относительно компактное открытое подмножество. Тогда для каждой точки $a \in Y$ существует мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(Y)$, которая в $a$ имеет полюс, а в $Y \setminus \{a\}$ голоморфна.*

*Доказательство.* По предложению 14.9,
$$k := \dim \operatorname{Im}(H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O})) < \infty.$$
Пусть $(U_1, z)$ — координатная окрестность $a$ с $z(a) = 0$. Положим $U_2 := X \setminus \{a\}$. Тогда $\mathfrak{U} = (U_1, U_2)$ есть открытое покрытие $X$. Голоморфные в $U_1 \cap U_2 = U_1 \setminus \{a\}$ функции $z^{-j}$ определяют коциклы
$$\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), \qquad j = 1, \ldots, k+1.$$
Так как $\dim \operatorname{Im}(H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \to H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})) < k+1$, то коциклы $\zeta_j | Y \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$, по модулю кограниц линейно зависимы, и, значит, существуют комплексные числа $c_1, \ldots, c_{k+1}$, не все равные нулю, и коцепь $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$, такие, что
$$c_1\zeta_1 + \ldots + c_{k+1}\zeta_{k+1} = \delta\eta \quad \text{относительно} \quad \mathfrak{U} \cap Y,$$
т. е.
$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \quad \text{на} \quad U_1 \cap U_2 \cap Y.$$
Поэтому существует функция $f \in \mathcal{M}(Y)$, которая в $U_1 \cap Y$ совпадает с
$$f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j},$$
а в $U_2 \cap Y = Y \setminus \{a\}$ равна $f_2$. Это и есть искомая функция.

**14.13. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные точки на $X$. Тогда для произвольно заданных комплексных чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ найдется мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(X)$ с $f(a_i) = c_i$ для $i = 1, \ldots, n$.*

*Доказательство.* По предложению 14.12, примененному к $Y = X$, для каждой пары $i \neq j$ найдется функция $f_{ij} \in \mathcal{M}(X)$,

которая в $a_i$ имеет полюс, а в $a_j$ голоморфна. Тогда для функции

$$g_{ij} := \frac{f_{ij} - f_{ij}(a_j)}{f_{ij} - f_{ij}(a_j) + 1} \in \mathcal{M}(X)$$

имеем $g_{ij}(a_i) = 1$ и $g_{ij}(a_j) = 0$. Функции

$$h_i := \prod_{j \neq i} g_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяют условию $h_i(a_j) = \delta_{ij}$, и, значит,

$$f := \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$$

является решением нашей задачи.

Мы докажем сейчас еще несколько следствий из теоремы конечности для некомпактных римановых поверхностей; читатель, которого интересуют только компактные поверхности, может их пропустить.

**14.14. Следствие.** *Пусть $Y$ — относительно компактное открытое подмножество некомпактной римановой поверхности $X$. Тогда существует голоморфная функция $f\colon Y \to \mathbb{C}$, отличная от константы на каждой связной компоненте множества $Y$.*

*Доказательство.* Выберем область $Y_1$ так, что $Y \Subset Y_1 \Subset X$, а также точку $a \in Y_1 \setminus Y$ (поскольку $X$ не компактна и связна, $Y_1 \setminus Y$ непусто). Теперь применим предложение 14.12 к $Y_1$ и точке $a$.

**14.15. Предложение.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и $Y \Subset Y' \subset X$ — ее открытые подмножества. Тогда*

$$\operatorname{Im}(H^1(Y', \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O})) = 0.$$

*Доказательство.* По предложению 14.9, мы знаем заранее, что

$$L := \operatorname{Im}(H^1(Y', \mathcal{O}) \to H^1(Y, \mathcal{O}))$$

есть конечномерное векторное пространство. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H^1(Y', \mathcal{O})$ — классы когомологий, сужение которых на $Y$ порождает векторное пространство $L$. Согласно (14.14), мы выберем функцию $f \in \mathcal{O}(Y')$, непостоянную ни на одной связной компоненте в $Y'$. Так как $H^1(Y', \mathcal{O})$ естественным образом является модулем над $\mathcal{O}(Y')$, то определены произведения

$f\xi_\nu \in H^1(Y', \mathcal{O})$. Согласно выбору $\xi_\nu$, существуют константы $c_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$, такие, что

$$(1) \qquad f\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} c_{\nu\mu}\xi_\mu \quad \text{на} \quad Y \quad \text{для} \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Положим

$$F := \det(f\delta_{\nu\mu} - c_{\nu\mu})_{1 \leqslant \nu,\, \mu \leqslant n}.$$

Тогда $F$ — голоморфная функция на $Y'$, отличная от тождественного нуля на каждой связной компоненте в $Y'$.

Из (1) следует, что

$$(2) \qquad F\xi_\nu | Y = 0 \quad \text{для} \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Любой класс когомологий $\zeta \in H^1(Y', \mathcal{O})$ можно представить некоторым коциклом $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, где $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — такое открытое покрытие $Y'$, что в каждом $U_i$ содержится не более одного нуля функции $F$. Таким образом, для $i \neq j$ имеем $F | U_i \cap U_j \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$. Поэтому существует коцикл $(g_{ij}) \in \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ с $f_{ij} = Fg_{ij}$. Пусть $\xi \in H^1(Y', \mathcal{O})$ есть класс когомологий для $(g_{ij})$. Тогда $\zeta = F\xi$. Поэтому из (2) следует, что $\zeta | Y = F\xi | Y = 0$, ч. т. д.

**14.16. Следствие.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и $Y \Subset Y' \subset X$ — ее открытые подмножества. Тогда для всякой дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(Y')$ найдется функция $f \in \mathcal{E}(Y)$, такая, что $\bar{\partial} f = \omega | Y$.*

*Доказательство.* По предложению 13.2, эта проблема локально разрешима, и, значит, существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ множества $Y'$ и функции $f_i \in \mathcal{E}(U_i)$ с $\bar{\partial} f_i = \omega | U_i$. Разности $f_i - f_j$ голоморфны на $U_i \cap U_j$ и, таким образом, определяют коцикл из $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Согласно (14.15), этот коцикл разрешим над $Y$, и, значит, существуют голоморфные функции $g_i \in \mathcal{O}(U_i \cap Y)$ с

$$f_i - f_j = g_i - g_j \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j \cap Y.$$

Поэтому существует функция $f \in \mathcal{E}(Y)$, такая, что

$$f = f_i - g_i \quad \text{на} \quad U_i \cap Y \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Функция $f$ является решением уравнения $\bar{\partial} f = \omega | Y$, ч. т. д.

*Замечание.* Утверждения 14.15 и 14.16 мы дополним в предложениях 25.6 и 26.1.

## § 15. Точная последовательность когомологий

В этом параграфе мы обсуждаем понятия гомоморфизмов пучков, точных последовательностей пучков и точной последовательности когомологий, которая соответствует короткой точной последовательности пучков и дает средство для вычисления групп когомологий или сведения их к другим группам.

**15.1. Определение.** Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки абелевых групп над топологическим пространством $X$. *Гомоморфизм пучков* $\alpha$: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ есть семейство гомоморфизмов групп

$$\alpha_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U), \quad U \text{ открыто в } X,$$

согласованное с отображениями сужения, т. е. такое, что для всякой пары открытых множеств $U$, $V \subset X$ с $V \subset U$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \text{отображение сужения}\downarrow & & \downarrow\text{отображение сужения} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Если все $\alpha_U$ — изоморфизмы, то $\alpha$ называется изоморфизмом.

Аналогично определяется гомоморфизм пучков векторных пространств.

Часто мы пишем кратко $\alpha$: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ вместо $\alpha_U$: $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$.

**15.2. Примеры.** (a) Пусть $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ — соответственно пучки дифференцируемых функций, дифференциальных форм первого и второго порядков на римановой поверхности $X$. Внешний дифференциал $d$ на функциях, соотв. на дифференциальных формах, порождает гомоморфизмы пучков

$$d\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{(1)}, \qquad d\colon \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(2)}$$

и аналогично для операторов $\partial$ и $\bar{\partial}$.

(b) На римановой поверхности $X$ естественные включения $\mathcal{O} \to \mathcal{E}$, $\mathbb{C} \to \mathcal{E}$, $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}$, $\Omega \to \mathcal{E}^{1,0}$ и т. д. являются гомоморфизмами пучков.

(c) На римановой поверхности $X$ гомоморфизм пучков ex: $\mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$ пучка голоморфных функций в мультипликативный пучок голоморфных функций со значениями в $\mathbb{C}^*$ определяется следующим образом: для открытых подмножеств $U \subset X$ и $f \in \mathcal{O}(U)$ полагают $\mathrm{ex}_U(f) := \exp(2\pi i f)$.

**15.3. Ядро гомоморфизма пучков.** Пусть $\alpha\colon \mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ есть гомоморфизм пучков на топологическом пространстве $X$. Для открытых $U\subset X$ пусть

$$\mathcal{K}(U):=\operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\alpha}\mathcal{G}(U)).$$

Семейство $\{\mathcal{K}(U)\}$ вместе с индуцируемыми из пучка $\mathcal{F}$ гомоморфизмами сужений образует, как легко проверить, тоже пучок, который называется ядром отображения $\alpha$ и обозначается $\mathcal{K}=\operatorname{Ker}\alpha$.

*Примеры.* На римановой поверхности имеем:

(a) $\mathcal{O}=\operatorname{Ker}(\mathcal{E}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}^{0,1})$ (см. (9.1));

(b) $\Omega=\operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{1,0}\xrightarrow{d}\mathcal{E}^{(2)})$ (см. (9.16));

(c) $\mathbb{Z}=\operatorname{Ker}(\mathcal{O}\xrightarrow{\mathrm{ex}}\mathcal{O}^*)$ (см. (15.2c)).

**15.4. Замечание.** Если для гомоморфизма пучков $\alpha\colon\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ на топологическом пространстве $X$ определить семейство

$$\mathcal{B}(U):=\operatorname{Im}(\mathcal{F}(U)\xrightarrow{\alpha}\mathcal{G}(U))\ \text{для}\ U,\ \text{открытых в}\ X,$$

то получится предпучок $\mathcal{B}$, который, вообще говоря, не удовлетворяет второй аксиоме пучка. В качестве примера рассмотрим гомоморфизм пучков

$$\mathrm{ex}\colon\ \mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}^*,\qquad f\longmapsto\exp(2\pi i f)$$

над пространством $\mathbb{C}^*$. Пусть $U_1=\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}_-$ и $U_2=\mathbb{C}^*\setminus\mathbb{R}_+$. Пусть элементы $f_k\in\mathcal{O}^*(U_k)$ определяются условием $f_k(z)=z$ для всех $z\in U_k$ $(k=1,\ 2)$. Так как $U_k$ односвязны, то

$$f_k\in\operatorname{Im}(\mathcal{O}(U_k)\xrightarrow{\mathrm{ex}}\mathcal{O}^*(U_k)).$$

Кроме того, $f_1\mid U_1\cap U_2=f_2\mid U_1\cap U_2$. Однако не существует

$$f\in\operatorname{Im}(\mathcal{O}(\mathbb{C}^*)\xrightarrow{\mathrm{ex}}\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*))$$

с $f\mid U_k=f_k$, так как функция $z\longmapsto z$ на $\mathbb{C}^*$ не имеет однозначного логарифма.

**15.5. Точные последовательности.** Гомоморфизм пучков $\alpha$: $\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ на топологическом пространстве $X$ индуцирует для каждого $x\in X$ гомоморфизмы слоев

$$\alpha_x\colon\ \mathcal{F}_x\longrightarrow\mathcal{G}_x.$$

Последовательность гомоморфизмов пучков $\mathcal{F}\xrightarrow{\alpha}\mathcal{G}\xrightarrow{\beta}\mathcal{H}$ называется *точной*, когда для каждого $x\in X$ точна последователь-

ность

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x,$$

т. е. $\operatorname{Ker}\beta_x = \operatorname{Im}\alpha_x$. Последовательность

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}_n, \quad n > 3,$$

гомоморфизмов пучков называется точной, если для всех $1 \leqslant k \leqslant n-2$ точны последовательности $\mathcal{F}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{F}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathcal{F}_{k+2}$.

Гомоморфизм пучков $\alpha$: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ называется *мономорфизмом*, если точна последовательность $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$, и *эпиморфизмом*, если точна последовательность $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \longrightarrow 0$.

**15.6. Лемма.** *Если $\alpha$: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ есть мономорфизм пучков на топологическом пространстве $X$, то для всякого открытого подмножества $U \subset X$ отображение $\alpha_U$: $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ инъективно.*

*Доказательство.* Пусть $f \in \mathcal{F}(U)$ и $\alpha_U(f) = 0$. Так как $\alpha_x$: $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{O}_x$ для каждого $x \in U$ инъективно, то для каждого $x \in U$ найдется открытая окрестность $V_x \subset U$ с $f \mid V_x = 0$. По первой аксиоме пучка отсюда следует, что $f = 0$.

**15.7. Замечание.** Если $\alpha$: $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ есть эпиморфизм пучков, то не обязательно для каждого открытого множества $U \subset X$ отображение $\alpha_U$: $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ сюръективно. Это показывает пример рассмотренного в (15.4) гомоморфизма пучков ex: $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$. Для каждого $x$ отображение ex: $\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_x^*$ сюръективно, так как локально всякая не обращающаяся в нуль функция обладает логарифмом, однако отображение ex: $\mathcal{O}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \mathcal{O}^*(\mathbb{C}^*)$ не сюръективно.

**15.8. Лемма.** *Если $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ есть точная последовательность пучков на топологическом пространстве $X$, то для всякого открытого множества $U \subset X$ точна последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U).$$

*Доказательство.* (a) Точность последовательности $0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U)$ доказана в (15.6).

(b) $\operatorname{Im}\alpha \subset \operatorname{Ker}\beta$. Пусть $f \in \mathcal{F}(U)$ и $g := \alpha(f)$. Так как для всякой $x \in U$ последовательность слоев $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ точна, то каждая точка $x \in U$ обладает окрестностью $V_x \subset U$, такой, что $\beta(g) \mid V_x = 0$. Из первой аксиомы пучка следует поэтому, что $\beta(g) = 0$.

(c) Для доказательства включения $\operatorname{Ker}\alpha \subset \operatorname{Im}\beta$ возьмем элемент $g \in \mathcal{G}(U)$ с $\beta(g) = 0$. Так как для всякой $x \in U$ имеем $\operatorname{Ker}\beta_x = \operatorname{Im}\alpha_x$, то существует открытое покрытие $(V_i)_{i \in I}$ множества $U$ и элементы $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ с $\alpha(f_i) = g \mid V_i$ для всех $i \in I$. Тогда на пересечениях $V_i \cap V_j$ имеем $\alpha(f_i - f_j) = 0$. Согласно (15.6), отсюда следует, что $f_i = f_j$ на $V_i \cap V_j$. По второй аксиоме пучка, найдется элемент $f \in \mathcal{F}(U)$ с $f \mid V_i = f_i$ для всех $i \in I$. Так как $\alpha(f) \mid V_i = \alpha(f \mid V_i) = g \mid V_i$, то из первой аксиомы пучка, примененной к пучку $\mathcal{G}$, следует, что $\alpha(f) = g$, ч. т. д.

**15.9. Примеры.** Приведем несколько примеров коротких точных последовательностей пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

на римановой поверхности $X$.

(a) $$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1} \longrightarrow 0.$$

Здесь $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E}$ — естественное включение. Точность следует из леммы Дольбо (13.2).

(b) Пусть $\mathcal{Z} := \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$ — пучок замкнутых дифференциальных форм. Последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{d} \mathcal{Z} \longrightarrow 0$$

точна. Отображение $d\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Z}$ эпиморфно, потому что локально всякая замкнутая дифференциальная форма точна, см. (10.4).

(c) $$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega \longrightarrow 0.$$

Эта точная последовательность является голоморфным аналогом последовательности (b).

(d) Так как $\Omega = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)})$, то для доказательства точности последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$

надо лишь показать, что $d\colon \mathcal{E}^{1,0} \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}$ — эпиморфизм. Относительно локальной карты $(U, z)$

$$d(f\,dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar z}\, d\bar z \wedge dz.$$

Поэтому для всякого открытого множества $V \subset U$, такого, что $z(V) \subset \mathbb{C}$ — круг, из леммы Дольбо (13.2) получается, что $d\colon \mathcal{E}^{1,0}(V) \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}(V)$ сюръективно. Поэтому $d\colon \mathcal{E}^{1,0}_a \longrightarrow \mathcal{E}^{(2)}_a$ сюръективно для каждой точки $a \in X$.

(e) Из (15.3c) и замечания 15.7 следует точность последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{ex}} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0,$$

**15.10.** Гомоморфизм пучков $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на топологическом пространстве $X$ индуцирует гомоморфизмы

$$\alpha^0: H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}),$$
$$\alpha^1: H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}).$$

Гомоморфизм $\alpha^0$ есть не что иное, как отображение $\alpha_X$: $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$. Гомоморфизм $\alpha^1$ получается так. Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$. Отображение

$$\alpha_{\mathfrak{U}}: C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$$

сопоставляет коцепи $\xi = (f_{ij}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ коцепь

$$\alpha_{\mathfrak{U}}(\xi) := (\alpha(f_{ij})) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

При этом коциклы переходят в коциклы, кограницы — в кограницы и тем самым индуцируется гомоморфизм

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}: H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

Набор $\{\bar{\alpha}_{\mathfrak{U}}\}$, где $\mathfrak{U}$ пробегает все открытые покрытия $X$, индуцирует гомоморфизм $\alpha^1$.

**15.11. Связывающий гомоморфизм.** Пусть задана точная последовательность пучков

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$$

на топологическом пространстве $X$. Мы определяем «связывающий» гомоморфизм

$$\delta^*: H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F})$$

следующим образом. Пусть

$$h \in H^0(X, \mathcal{H}) = \mathcal{H}(X).$$

Так как все гомоморфизмы $\beta_x$: $\mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ сюръективны, то существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ пространства $X$ и коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, такие, что

(1) $$\beta(g_i) = h \mid U_i \quad \text{для всех } i \in I.$$

Поэтому над $U_i \cap U_j$ имеем $\beta(g_j - g_i) = 0$. По лемме 15.8, существуют $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ с

(2) $$\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i.$$

Так как над $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполняется $\alpha(f_{ij} + f_{jk} - f_{ik}) = 0$, то из (15.6) следует, что $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$, т. е.

$$(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Пусть теперь $\delta^* h \in H^1(X, \mathcal{F})$ есть класс когомологий, представляемый коциклом $(f_{ij})$. Легко проверить, что это определение не зависит от выбора различных допустимых коцепей.

**15.12. Предложение.** *Пусть $X$ — топологическое пространство и*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*есть точная последовательность пучков на $X$. Тогда индуцированная последовательность групп когомологий*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*}$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H})$$

*тоже точна.*

*Доказательство.* (a) Точность в членах $H^0(X, \mathcal{F})$ и $H^0(X, \mathcal{G})$ следует из леммы 15.8.

(b) $\operatorname{Im}\beta^0 \subset \operatorname{Ker}\delta^*$. Пусть $g \in H^0(X, \mathcal{G})$ и $h := \beta^0(g)$. В конструкции для $\delta^*h$, описанной в (15.11), можно взять $g_i = g \mid U_i$. Тогда $f_{ij} = 0$ и, значит, $\delta^*h = 0$.

(c) $\operatorname{Ker}\delta^* \subset \operatorname{Im}\beta^0$. Пусть $h \in \operatorname{Ker}\delta^*$. В обозначениях из (15.11) $\delta^*h$ представляется коциклом $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Так как $\delta^*h = 0$, то существует коцепь $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ с $f_{ij} = f_j - f_i$ над $U_i \cap U_j$. Положим $\tilde{g}_i := g_i - \alpha(f_i)$; тогда из $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$ следует, что $\tilde{g}_i = \tilde{g}_j$ над $U_i \cap U_j$. Таким образом, $\tilde{g}_i$ соединяются в один глобальный элемент $g \in H^0(X, \mathcal{G})$. Над $U_i$ имеем $\beta(g) = \beta(\tilde{g}_i) = \beta(g_i - \alpha(f_i)) = \beta(g_i) = h$, т. е. $h \in \operatorname{Im}\beta^0$.

(d) $\operatorname{Im}\delta^* \subset \operatorname{Ker}\alpha^1$. Это включение следует из соотношения (2) в (15.11).

(e) $\operatorname{Ker}\alpha^1 \subset \operatorname{Im}\delta^*$. Пусть $\xi \in \operatorname{Ker}\alpha^1$ представляется коциклом $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$. Так как $\alpha^1(\xi) = 0$, то найдется коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ с $\alpha(f_{ij}) = g_j - g_i$ над $U_i \cap U_j$. Отсюда следует, что

$$0 = \beta(\alpha(f_{ij})) = \beta(g_j) - \beta(g_i) \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j.$$

Поэтому существует $h \in \mathcal{H}(X) = H^0(X, \mathcal{H})$ с $h \mid U_i = \beta(g_i)$. Из конструкции в (15.11) видно, что $\delta^*h = \xi$.

(f) $\operatorname{Im}\alpha^1 \subset \operatorname{Ker}\beta^1$. Это следует из того, что последовательность

$$\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$$

точна согласно (15.8).

(g) $\operatorname{Ker}\beta^1 \subset \operatorname{Im}\alpha^1$. Пусть $\eta \in \operatorname{Ker}\beta^1$ представляется коциклом $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, где $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$. Тогда имеется коцепь $(h_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$ с $\beta(g_{ij}) = h_j - h_i$. Для каждой $x \in X$ выберем $\tau x \in I$ с $x \in U_{\tau x}$. Так как $\beta_x \colon \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ сюръективно, то существуют открытая окрестность $V_x \subset U_{\tau x}$ точки $x$ и элемент $g_x \in \mathcal{G}(V_x)$ с $\beta(g_x) = h_{\tau x} \mid V_x$. Пусть $\mathfrak{B} = (V_x)_{x \in X}$ и $\tilde{g}_{xy} =$

$= g_{\tau x,\, \tau y} | V_x \cap V_y$. Тогда $(\tilde{g}_{xy}) \in Z^1(\mathfrak{B}, \mathcal{G})$ есть коцикл, который также представляет класс когомологий $\eta$. Пусть $\psi_{xy} := \tilde{g}_{xy} - g_y + g_x$. Коцикл $(\psi_{xy})$ когомологичен $(\tilde{g}_{xy})$ и еще $\beta(\psi_{xy}) = 0$. Таким образом, существует $f_{xy} \in \mathcal{F}(V_x \cap V_y)$ с $\alpha(f_{xy}) = \psi_{xy}$. Так как отображение

$$\alpha\colon \mathcal{F}(V_x \cap V_y \cap V_z) \to \mathcal{G}(V_x \cap V_y \cap V_z),$$

согласно (15.6), инъективно, то $(f_{xy}) \in Z^1(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$. Для класса когомологий $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ коцикла $(f_{xy})$ тогда имеем $\alpha^1(\xi) = \eta$.

Этим предложение 15.12 доказано.

**15.13. Предложение.** *Пусть* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ *есть точная последовательность пучков на топологическом пространстве* $X$ *с* $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. *Тогда*

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X).$$

*Доказательство.* Так как $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$, то из предложения 15.12 получается точная последовательность

$$\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \to 0.$$

Из этого и следует утверждение.

Для некоторых применений важно иметь явное описание изоморфизма

$$\Phi\colon H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X).$$

По лемме 15.8, мы можем предполагать, что $\mathcal{F} = \operatorname{Ker}\beta$ и $\alpha\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ есть включение.

Пусть $\xi \in H^1(X, \mathcal{F})$ — класс когомологий, представляемый коциклом $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. Так как $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = 0$, то существует коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ с $f_{ij} = g_j - g_i$ над $U_i \cap U_j$. Так как $\beta(f_{ij}) = 0$, то $\beta(g_i)$ и $\beta(g_j)$ совпадают над $U_i \cap U_j$ и, значит, объединяются в один глобальный элемент $h \in \mathcal{H}(X)$. Тогда $\Phi(\xi)$ есть класс вычетов элемента $h$ по модулю $\beta\mathcal{G}(X)$. То, что таким образом описываемое отображение $\Phi$ является обратным к изоморфизму $\mathcal{H}(X)/\beta\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{F})$, следует из пункта (е) доказательства (15.12).

**15.14. Теорема Дольбо.** *На всякой римановой поверхности* $X$ *имеют место изоморфизмы*

(a) $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathcal{E}(X)$;

(b) $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$.

Ввиду соотношения $H^1(X, \mathcal{E}^{0,1}) = H^1(X, \mathcal{E}^{(2)}) = 0$ и предложения 15.13, это следует из точных последовательностей (15.9a) и (15.9d).

*Замечание.* Предложение 13.4 является частным случаем теоремы Дольбо.

**15.15. Группа де Рама.** На римановой поверхности $X$ всякая точная дифференциальная форма замкнута, но не всякая замкнутая дифференциальная форма точна. Поэтому рассматривается факторгруппа

$$\mathrm{Rh}^1(X) := \frac{\operatorname{Ker}\left(\mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(2)}(X)\right)}{\operatorname{Im}\left(\mathscr{E}(X) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(1)}(X)\right)}$$

замкнутых дифференциальных форм по модулю точных форм. Две замкнутые дифференциальные формы, которые определяют один и тот же элемент в $\mathrm{Rh}^1(X)$ (и разность которых, таким образом, точна), называются когомологичными.

Группа $\mathrm{Rh}^1(X)$ называется первой группой де Рама поверхности $X$. Равенство $\mathrm{Rh}^1(X)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда всякая замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ обладает первообразной функцией. Согласно (10.7), $\mathrm{Rh}^1(X)=0$, если $X$ односвязна.

**Теорема де Рама.** *На всякой римановой поверхности $X$*

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Rh}^1(X).$$

Это следует, с учетом (15.13), из точной последовательности (15.9b). Предложение 12.7 (a) является частным случаем теоремы де Рама.

*Замечание.* Доказанные здесь только для римановых поверхностей, теоремы де Рама и Дольбо справедливы в общей форме для дифференцируемых, соотв. комплексных многообразий произвольной размерности. По этим вопросам мы отсылаем читателя к учебникам по теории функций многих комплексных переменных, например [30]—[34]. Систематическое введение в теорию пучков и когомологий, из которой в § 6, 12 и 15 изложены лишь простейшие основные понятия, читатель найдет в [42].

## § 16. Теорема Римана—Роха

Теорема Римана—Роха является центральной теоремой в теории компактных римановых поверхностей. Грубо говоря, это есть утверждение о числе линейно независимых мероморфных функций, у которых полярные особенности подчинены некоторым ограничениям.

**16.1. Дивизоры.** Пусть $X$ — риманова поверхность. *Дивизор* на $X$ есть отображение

$$D\colon X \longrightarrow \mathbb{Z},$$

такое, что для всякого компактного подмножества $K \subset X$ существует лишь конечное число точек $x \in K$ с $D(x) \neq 0$.

Относительно сложения множество всех дивизоров на $X$ образует абелеву группу, которая обозначается $\operatorname{Div}(X)$. В $\operatorname{Div}(X)$ вводится частичное упорядочение. Для $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ полагают $D \leqslant D'$, если $D(x) \leqslant D'(x)$ для всех $x \in X$.

**16.2. Дивизоры мероморфных функций и дифференциальных форм.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y$ — открытое подмножество в $X$. Для мероморфной функции $f \in \mathcal{M}(Y)$ и точки $a \in Y$ положим

$$\operatorname{ord}_a(f) := \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ в } a \text{ голоморфна и не равна } 0, \\ k, & \text{если } f \text{ в } a \text{ имеет нуль } k\text{-го порядка}, \\ -k, & \text{если } f \text{ в } a \text{ имеет полюс } k\text{-го порядка}, \\ \infty, & \text{если } f \equiv 0 \text{ в некоторой окрестности } a. \end{cases}$$

Таким образом, для мероморфной функции $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ отображение $x \longmapsto \operatorname{ord}_x(f)$ является дивизором на $X$, который называется *дивизором функции* $f$ и обозначается $(f)$.

Функция $f$ называется *кратной* дивизору $D$, если $(f) \geqslant D$; $f$ голоморфна тогда и только тогда, когда $(f) \geqslant 0$.

Для мероморфной дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ порядок в точке $a \in Y$ вводится следующим образом.

Выбирается координатная окрестность $(U, z)$ точки $a$, в $U \cap Y$ форма $\omega$ записывается как $\omega = f\,dz$ и по определению полагается $\operatorname{ord}_a(\omega) = \operatorname{ord}_a(f)$. Для дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ отображение $x \longmapsto \operatorname{ord}_x(\omega)$ опять является дивизором на $X$, который обозначается $(\omega)$.

Для $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ и $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ имеют место соотношения

$$(fg) = (f) + (g), \qquad \left(\frac{1}{f}\right) = -(f),$$

$$(f\omega) = (f) + (\omega).$$

Дивизор $D \in \operatorname{Div}(X)$ называется *главным дивизором*, когда существует функция $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, такая, что $D = (f)$. Два дивизора $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ называются *эквивалентными*, когда их разность есть главный дивизор.

*Каноническим дивизором* называется дивизор $(\omega)$ мероморфной дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$. Любые два канонических дивизора $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \setminus \{0\}$ эквивалентны,

так как существует функция $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, для которой $\omega_1 = f\omega_2$ и, значит, $(\omega_1) - (\omega_2) = (f)$.

**16.3. Степень дивизора.** Пусть теперь $X$ — *компактная* риманова поверхность. Тогда для каждого $D \in \operatorname{Div}(X)$ имеем $D(x) \neq 0$ лишь для конечного числа $x \in X$. Поэтому можно определить степень

$$\deg\colon \operatorname{Div}(X) \to \mathbf{Z},$$

полагая

$$\deg D := \sum_{x \in X} D(x).$$

Отображение deg является гомоморфизмом групп. Для главного дивизора $(f)$ на компактной римановой поверхности $X$ имеем $\deg(f) = 0$, так как мероморфная на $X$ функция имеет столько же нулей, сколько и полюсов. Поэтому эквивалентные дивизоры имеют одинаковую степень.

**16.4. Пучки $\mathcal{O}_D$.** Пусть $D$ — дивизор на римановой поверхности $X$. Для открытого множества $U \subset X$ пусть $\mathcal{O}_D(U)$ состоит из всех мероморфных функций в $U$, кратных дивизору $-D$, т. е.

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U)\colon \operatorname{ord}_x(f) \geqslant -D(x) \text{ для всех } x \in U\}.$$

Вместе с естественными отображениями сужения $\mathcal{O}_D$ является пучком. В частности, для нулевого дивизора $D = 0$ имеем $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$.

Если $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ — эквивалентные дивизоры, то пучки $\mathcal{O}_D$ и $\mathcal{O}_{D'}$ изоморфны. Изоморфизм получается следующим образом. Пусть $\psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ такова, что $D - D' = (\psi)$. Тогда гомоморфизм пучков

$$\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D'}, \quad f \mapsto \psi f,$$

индуцируемый умножением на $\psi$, является изоморфизмом.

**16.5. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $D \in \operatorname{Div}(X)$ — дивизор с $\deg D < 0$. Тогда $H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0$.*

*Доказательство.* Предположим, что существует $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$, $f \neq 0$. Тогда $(f) \geqslant -D$ и, значит,

$$\deg(f) \geqslant -\deg D > 0.$$

Но это противоречит тому, что $\deg(f) = 0$.

**16.6. Пучки $\mathcal{H}^{D}_{D'}$.** Пусть $D$ и $D'$ — два дивизора на римановой поверхности $X$, причем $D \leqslant D'$. Для всякого открытого

множества $U \subset X$ тогда $\mathcal{O}_D(U) \subset \mathcal{O}_{D'}(U)$ и тем самым определен естественный мономорфизм пучков $\mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D'}$.

Пусть $x \in X$ — некоторая точка, $(U, z)$ — ее координатная окрестность с $z(x)=0$ и $k := D(x)$, $k' := D'(x)$. Слой $\mathcal{O}_{D,x}$ состоит из всех ростков мероморфных функций $f$ в $x$, у которых разложение Лорана имеет следующий вид:

$$f = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu z^\nu.$$

Аналогично определяется слой $\mathcal{O}_{D',x}$. Поэтому фактор $\mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$ является $\mathbb{C}$-векторным пространством размерности $k'-k$. Всякий элемент из $\mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$ (при заданной локальной координате $z$) можно однозначно представить в виде суммы

$$\sum_{\nu=-k'}^{-k-1} c_\nu z^\nu, \qquad c_\nu \in \mathbb{C}.$$

Мы определяем пучок $\mathcal{H}_{D'}^{D}$, полагая

$$\mathcal{H}_{D'}^{D}(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x} \quad \text{для } U, \text{ открытых в } X,$$

с естественными отображениями сужений. Обе аксиомы пучка тривиально выполняются.

Для всякого открытого множества $U \subset X$ с $D \mid U = D' \mid U$ имеем $\mathcal{H}_{D'}^{D}(U)=0$. Отсюда следует, что $\mathcal{H}_{D',x}^{D}=0$ для всех $x \in X$, таких, что $D(x)=D'(x)$. В общем случае $\mathcal{H}_{D',x}^{D} = \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$. Определен канонический эпиморфизм пучков $\mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{H}_{D'}^{D}$, ядро которого есть $\mathcal{O}_D$; таким образом, мы имеем точную последовательность пучков

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{H}_{D'}^{D} \to 0.$$

**16.7. Лемма.** *В принятых выше обозначениях,*

$$H^1(X, \mathcal{H}_{D'}^{D}) = 0.$$

*Если $X$ компактна, то, кроме того,*

$$\dim H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^{D}) = \deg D' - \deg D.$$

*Доказательство.* Пусть $S$ есть множество всех точек $x \in X$, для которых $D(x) \neq D'(x)$. Множество $S$ замкнуто и дискретно.

(a) Пусть $\xi \in H^1(X, \mathcal{H}_{D'}^{D})$ — класс когомологий, который представляется некоторым коциклом из $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_{D'}^{D})$. Покрытие $\mathfrak{U}$ обладает измельчением $\mathfrak{V}=(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ со следующим свойством: в каждом $V_\alpha$ содержится не более одной точки множества $S$. Тогда для $\alpha \neq \beta$ имеем $\mathcal{H}_{D'}^{D}(V_\alpha \cap V_\beta)=0$ и, значит, $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{H}_{D'}^{D})=0$. Отсюда следует, что $\xi=0$.

(b) Если $X$ компактна, то $S$ конечно и

$$\dim H^0(X, \mathcal{H}^D_{D'}) = \dim \prod_{x \in S} \mathcal{O}_{D', x}/\mathcal{O}_{D, x} = $$
$$= \sum_{x \in S} (D'(x) - D(x)) = \deg D' - \deg D.$$

Из точной последовательности когомологий, соответствующей последовательности пучков (*), вытекает такое следствие.

**16.8. Следствие.** *Пусть $X$ — риманова поверхность и $D \leqslant D'$ — два дивизора на $X$. Тогда имеет место точная последовательность*

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^0(X, \mathcal{H}^D_{D'}) \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0.$$

**16.9. Теорема Римана — Роха.** *Для всякого дивизора $D$ на компактной римановой поверхности $X$ рода $g$ векторные пространства $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ и $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ конечномерны и*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

*Доказательство.* (a) Утверждение справедливо для дивизора $D = 0$. В самом деле, $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X)$ состоит только из постоянных функций и, таким образом, $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$, а $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g$ по определению.

(b) Пусть $D \leqslant D'$ — два дивизора на $X$ и для одного из них справедливо утверждение теоремы Римана — Роха. Мы расщепляем точную последовательность из (16.8) на две короткие точные последовательности. Пусть

$$V^D_{D'} := \operatorname{Im}(H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^0(X, \mathcal{H}^D_{D'})),$$
$$W^D_{D'} := H^0(X, \mathcal{H}^D_{D'})/V^D_{D'}.$$

Тогда $\dim V^D_{D'} + \dim W^D_{D'} = \deg D' - \deg D$ и последовательности

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_D) \to H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \to V^D_{D'} \to 0,$$
$$0 \to W^D_{D'} \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to 0$$

точны. Из этого следует, что все введенные здесь пространства конечномерны и выполняются следующие соотношения для размерностей:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V^D_{D'},$$
$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W^D_{D'}.$$

Складывая эти равенства, получаем, что

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' =$$
$$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D.$$

Из этого следует, что если формула Римана — Роха справедлива для одного из двух дивизоров $D \leqslant D'$, то она справедлива и для другого. Таким образом, согласно (а), теорема верна для всякого дивизора $D' \geqslant 0$. Если $D$ — произвольный дивизор, то найдется дивизор $D'$ с $D' \geqslant 0$ и $D' \geqslant D$. Поэтому теорема справедлива для произвольного $D$, ч. т. д.

**16.10.** Введем обозначение

$$i(D) := \dim H^1(X, \mathcal{O}_D).$$

С этим обозначением теорему Римана — Роха можно записать в виде

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D + i(D).$$

В (17.16) мы докажем, что $i(D) = 0$, если $\deg D > 2g - 2$. В любом случае $i(D) \geqslant 0$ и, таким образом, получается оценка снизу на $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D)$.

Из предложения 16.5 следует, что

$$i(D) = g - 1 - \deg D, \quad \text{если} \quad \deg D < 0.$$

**16.11. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$ и $a$ — точка на $X$. Тогда существует непостоянная мероморфная функция $f$ на $X$, которая в $a$ имеет полюс порядка $\leqslant g + 1$, а в остальном голоморфна.*

*Доказательство.* Пусть $D: X \to \mathbb{Z}$ есть дивизор с $D(a) = g + 1$ и $D(x) = 0$ для $x \neq a$. По теореме Римана — Роха,

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geqslant 1 - g + \deg D = 2.$$

Таким образом, существует непостоянная функция $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$. Эта функция удовлетворяет указанным условиям.

**16.12. Следствие.** *Для всякой римановой поверхности $X$ рода $g$ существует не более чем $(g+1)$-листное голоморфное накрывающее отображение $f: X \to \mathbb{P}_1$.*

*Доказательство.* Согласно предложению 4.24, такое накрывающее отображение осуществляет функция $f$ из предложения 16.11, так как значение $\infty$ принимается ею с кратностью $\leqslant g + 1$.

**16.13. Следствие.** *Всякая риманова поверхность рода нуль изоморфна римановой числовой сфере.*

Это следует из того, что однолистное накрытие является биголоморфным отображением.

# § 17. Теорема двойственности Серра

Теорема двойственности Серра дает более простую интерпретацию групп когомологий $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ при помощи дифференциальных форм. Оказывается, что $\dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$ равна максимальному числу линейно независимых мероморфных дифференциальных форм, кратных дивизору $D$. В качестве следствия из теоремы двойственности мы доказываем, в частности, формулу Римана — Гурвица, по которой можно вычислить род накрытия через число листов и порядок разветвления.

**17.1. Определение линейной формы** $\operatorname{Res}: H^1(X, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$. Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Согласно (15.14), точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \longrightarrow 0$$

индуцирует изоморфизм $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X)/d\mathcal{E}^{1,0}(X)$. Пусть $\xi \in H^1(X, \Omega)$ и $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ — представитель $\xi$, соответствующий этому изоморфизму. Мы полагаем

$$\operatorname{Res}(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega.$$

В силу предложения 10.20, это определение не зависит от выбора представителей $\omega$.

**17.2. Системы дифференциальных форм Миттаг-Леффлера.** Пусть $X$ — риманова поверхность, $\mathcal{M}^{(1)}$ — пучок мероморфных дифференциальных форм на $X$ и $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$. Коцепь $\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ называется *системой Миттаг-Леффлера*, если разности $\omega_j - \omega_i$ голоморфны в $U_i \cap U_j$, т. е. $\delta\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$. Через $[\delta\mu] \in H^1(X, \Omega)$ мы обозначаем класс когомологий коцикла $\delta\mu$.

Пусть $a$ — точка в $X$. *Вычет* системы Миттаг-Леффлера $\mu = (\omega_i)$ в точке $a$ определяется следующим образом: выбирают $i \in I$ с $a \in U_i$ и полагают

$$\operatorname{Res}_a(\mu) := \operatorname{Res}_a(\omega_i).$$

Так как для $a \in U_i \cap U_j$ разность $\omega_i - \omega_j$ голоморфна, то $\omega_i$ и $\omega_j$ в $a$ имеют одинаковый вычет и, таким образом, определение не зависит от выбора $i \in I$.

Предположим теперь, что риманова поверхность $X$ *компактна.* Тогда $\operatorname{Res}_a(\mu) \neq 0$ лишь для конечного числа точек $a$ и, значит, можно определить

$$\operatorname{Res}(\mu) := \sum_{a \in X} \operatorname{Res}_a(\mu).$$

Мы покажем сейчас, как этот вычет связан с определенным в (17.1) отображением Res.

**17.3. Предложение.** *В принятых выше обозначениях* $\operatorname{Res}(\mu) = \operatorname{Res}([\delta\mu])$.

*Доказательство.* Для вычисления $\operatorname{Res}([\delta\mu])$ нам надо использовать явную конструкцию изоморфизма $H^1(X, \Omega) \cong \mathscr{E}^2(X)/d\mathscr{E}^{1,0}(X)$ (см. (15.13)).

Ввиду того что $\delta\mu = (\omega_j - \omega_i) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega) \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathscr{E}^{1,0})$ и $H^1(X, \mathscr{E}^{1,0}) = 0$, найдется коцепь $(\sigma_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{E}^{1,0})$ с

$$\omega_j - \omega_i = \sigma_j - \sigma_i \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j.$$

Так как $d(\omega_j - \omega_i) = \bar\partial(\omega_j - \omega_i) = 0$, то из этого следует, что $d\sigma_i = d\sigma_j$ над $U_i \cap U_j$, и, значит, существует глобальная дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{(2)}(X)$ с $\omega \mid U_i = d\sigma_i$. Эта дифференциальная форма представляет класс когомологий $[\delta\mu]$ и, таким образом,

$$\operatorname{Res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega.$$

Пусть $a_1, \ldots, a_n \in X$ — конечное число полюсов системы $\mu$ и $X' = X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. На $X' \cap U_i \cap U_j$ имеем $\sigma_i - \omega_i = \sigma_j - \omega_j$ и, значит, существует дифференциальная форма $\sigma \in \mathscr{E}^{1,0}(X')$ с $\sigma = \sigma_i - \omega_i$ на $X' \cap U_i$. Поэтому $\omega = d\sigma$ в $X'$.

Для каждой $a_k$ найдется $i(k) \in I$ с $a_k \in U_{i(k)}$ и координатная окрестность $(V_k, z_k)$ с $V_k \subset U_{i(k)}$ и $z_k(a_k) = 0$. Мы можем считать, что $V_k$ попарно не пересекаются и что $z_k(V_k) \subset \mathbb{C}$ есть единичный круг. Выберем для каждого $k$ такую функцию $f_k \in \mathscr{E}(X)$ с $\operatorname{Supp}(f_k) \subset V_k$, чтобы $f_k \mid V'_k = 1$ в некоторой открытой окрестности $V'_k \subset V_k$ точки $a_k$. Положим

$$g := 1 - (f_1 + \ldots + f_n).$$

Так как $g \mid V'_k = 0$, то $g\sigma$ можно продолжить нулем в точки $a_k$ и рассматривать ее как элемент из $\mathscr{E}^{1,0}(X)$. Согласно (10.20),

$$\iint_X d(g\sigma) = 0.$$

В $V'_k \setminus \{a_k\}$ имеем $d(f_k\sigma) = d\sigma = d(\sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)}) = d\sigma_{i(k)}$ и, значит, $d(f_k\sigma)$ продолжается в $a_k$ дифференцируемым образом. В $X' \setminus \operatorname{Supp}(f_k)$ форма $f_k\sigma$ равна нулю, поэтому $d(f_k\sigma)$ можно рассматривать как элемент из $\mathscr{E}^{(2)}(X)$. Из равенства $\omega = d(g\sigma) + \sum d(f_k\sigma)$ следует, что

$$\iint_X \omega = \sum_{k=1}^{n} \iint_X d(f_k\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{V_k} d(f_k\sigma_{i(k)} - f_k\omega_{i(k)}).$$

Опять ввиду (10.20),

$$\iint_{V_k} d(f_k\sigma_{i(k)}) = 0,$$

и, как в (10.21), доказывается, что

$$\iint_{V_k} d(f_k\omega_{i(k)}) = -2\pi i \operatorname{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}).$$

Объединяя все вместе, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\iint_X \omega = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k}(\omega_{i(k)}) = \operatorname{Res}(\mu), \quad \text{ч. т. д.}$$

**17.4. Пучки $\Omega_D$.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Для всякого дивизора $D \in \operatorname{Div}(X)$ через $\Omega_D$ обозначается пучок мероморфных дифференциальных форм, кратных $-D$. Таким образом, для открытого множества $U \subset X$ множество $\Omega_D(U)$ состоит из всех дифференциальных форм $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(U)$ с $\operatorname{ord}_x(\omega) \geqslant -D(x)$ для всех $x \in U$. В частности, $\Omega_0 = \Omega$ есть пучок всех голоморфных дифференциальных форм.

Пусть $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)$ — отличная от нуля мероморфная дифференциальная форма на $X$, например $\omega = df$, где $f \in \mathscr{M}(X)$ — непостоянная мероморфная функция. Пусть $K$ есть дивизор $\omega$. Для любого дивизора $D \in \operatorname{Div}(X)$ умножение на $\omega$ индуцирует тогда изоморфизм пучков

$$\mathcal{O}_{D+K} \xrightarrow{\sim} \Omega_D, \quad f \mapsto f\omega.$$

**Лемма.** *Существует константа* $k_0 \in \mathbb{Z}$, *такая, что*

$$\dim H^0(X, \Omega_D) \geqslant \deg D + k_0$$

*для всех* $D \in \operatorname{Div}(X)$.

*Доказательство.* Пусть $\omega$ и $K$ такие, как указано выше. Род $X$ пусть равен $g$. Положим $k_0 := 1 - g + \deg K$. Тогда, по теореме Римана — Роха,

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) = \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \deg(D+K) \geqslant \\ &\geqslant \deg D + k_0.\end{aligned}$$

**17.5. Определение двойственности.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $D \in \operatorname{Div}(X)$ — дивизор. Умножение

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \to \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

индуцирует отображение

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega).$$

Композиция этого отображения с Res: $H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ дает билинейное отображение

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C},$$
$$\langle \omega, \xi \rangle := \operatorname{Res}(\omega\xi).$$

Это отображение индуцирует линейное отображение

$$\iota_D\colon H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

пространства $H^0(X, \Omega_{-D})$ в сопряженное пространство к $H^1(X, \mathcal{O}_D)$. Теорема двойственности Серра утверждает, что $\langle\ ,\ \rangle$ является двойственностью, т. е. что $\iota_D$ есть изоморфизм. Мы это докажем в (17.6) и (17.9).

**17.6. Предложение.** *Отображение $\iota_D$ инъективно.*

*Доказательство.* Надо показать, что для всякой $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$, $\omega \neq 0$, существует $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ с $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$. Пусть $a \in X$ — точка с $D(a) = 0$ и $(U_0, z)$ — координатная окрестность $a$ с $z(a) = 0$ и $D \mid U_0 = 0$. В $U_0$ форму $\omega$ можно записать как $\omega = f\,dz$ с $f \in \mathcal{O}(U_0)$. Можно считать $U_0$ настолько малой, что $f$ не имеет нулей в $U_0 \diagdown \{a\}$. Положим $U_1 = X \diagdown \{a\}$ и $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Пусть $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ определяется условиями $f_0 = (zf)^{-1}$ и $f_1 = 0$. Тогда

$$\omega\eta = \left(\frac{dz}{z},\ 0\right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

есть система Миттаг-Леффлера с $\operatorname{Res}(\omega\eta) = 1$. Имеем $\delta\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Пусть $\xi = [\delta\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ есть класс когомологий для $\delta\eta$. Так как $\omega\xi = \omega \cdot [\delta\eta] = [\delta(\omega\eta)]$, то из предложения 17.3 следует, что

$$\langle \omega, \xi \rangle = \operatorname{Res}(\omega\xi) = \operatorname{Res}[\delta(\omega\eta)] = \operatorname{Res}(\omega\eta) = 1, \quad \text{ч. т. д.}$$

**17.7.** Пусть $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ — два дивизора на компактной римановой поверхности $X$ с $D' \leqslant D$. Тогда включение $0 \to \mathcal{O}_{D'} \to \mathcal{O}_D$ индуцирует, согласно (16.8), эпиморфизм

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D) \to 0.$$

В свою очередь это индуцирует мономорфизм сопряженных пространств

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \xrightarrow{i_{D'}^D} H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^*.$$

Легко убедиться, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i^D_{D'}} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & \uparrow \iota_D & & \uparrow \iota_{D'} \\ 0 \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D'}) \end{array}$$

где вертикальные стрелки — это отображения из (17.5), коммутативна.

**Лемма.** *В принятых выше обозначениях, пусть* $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ *и* $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D'})$ *таковы, что*

$$i^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega).$$

*Тогда* $\omega$ *принадлежит* $H^0(X, \Omega_{-D})$ *и* $\lambda = \iota_D(\omega)$.

*Доказательство.* Предположим, что $\omega$ не принадлежит $H^0(X, \Omega_{-D})$. Тогда существует точка $a \in X$, в которой $\operatorname{ord}_a(\omega) < D(a)$. Пусть $(U_0, z)$ — координатная окрестность $a$ с $z(a) = 0$. В $U_0$ форму $\omega$ можно записать как $\omega = f\,dz$ с $f \in \mathcal{M}(U_0)$. Можно считать $U_0$ настолько малой, что

(i) $D \mid U_0 \setminus \{a\} = 0, \quad D' \mid U_0 \setminus \{a\} = 0$;

(ii) $f$ не имеет нулей и полюсов в $U_0 \setminus \{a\}$.

Положим $U_1 = X \setminus \{a\}$ и $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$. Пусть $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ определяется условиями $f_0 = (zf)^{-1}$ и $f_1 = 0$. Поскольку $\operatorname{ord}_a(\omega) < D(a)$, то даже $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Имеем

$$\delta\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{D'}).$$

Класс когомологий для $\delta\eta$ в $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ мы обозначим через $\xi'$, а в $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ — через $\xi$. Имеем $\xi = 0$. По предположению,

$$\langle \omega, \xi' \rangle = i^D_{D'}(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0.$$

С другой стороны, из $\omega\eta = (dz/z, 0)$ получается, что $\langle \omega, \xi' \rangle = \operatorname{Res}(\omega\eta) = 1$ — противоречие!

Таким образом, предположение было неверным и, значит, $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$.

Так как $i^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega) = i^D_{D'}(\iota_D(\omega))$, то равенство $\lambda = \iota_D(\omega)$ следует из инъективности $i^D_{D'}$.

**17.8.** Пусть $D$ и $B$ — два произвольных дивизора на компактной римановой поверхности $X$. Для мероморфной функции $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ морфизм пучков

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D, \quad f \mapsto \psi \cdot f$$

индуцирует линейное отображение $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$, а значит, и линейное отображение

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*,$$

которое мы тоже обозначим через $\psi$. По определению,

$$(\psi\lambda)(\xi)=\lambda(\psi\xi) \text{ для } \lambda\in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*, \ \xi\in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}).$$

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ \uparrow \iota_D & & \uparrow \iota_{D-B} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array}$$

где стрелка во второй строке тоже означает умножение на $\psi$, коммутативна. Это следует из того, что $\langle\psi\omega, \xi\rangle=\langle\omega, \psi\xi\rangle$.

**Лемма.** *Если* $\psi\in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ — *не нулевой элемент, то отображение*

$$\psi\colon H^1(X, \mathcal{O}_D)^*\to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

*инъективно.*

*Доказательство.* Пусть $A:=(\psi)\geqslant -B$ есть дивизор $\psi$. Отображение $\mathcal{O}_{D-B}\xrightarrow{\psi\cdot}\mathcal{O}_D$ факторизуется в

$$\mathcal{O}_{D-B}\to\mathcal{O}_{D+A}\xrightarrow{\psi\cdot}\mathcal{O}_D,$$

где $\mathcal{O}_{D+A}\xrightarrow{\psi\cdot}\mathcal{O}_D$ — изоморфизм. Так как отображение $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})\to H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})$, индуцируемое включением $\mathcal{O}_{D-B}\to\mathcal{O}_{D+A}$, есть, согласно (16.8), эпиморфизм, то

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})\xrightarrow{\psi\cdot} H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

тоже эпиморфизм. Из этого следует наше утверждение.

**17.9. Теорема двойственности Серра.** *Для всякого дивизора $D$ на компактной римановой поверхности $X$ отображение*

$$\iota_D\colon H^0(X, \Omega_{-D})\to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*,$$

*определенное в* (17.6), *является изоморфизмом.*

*Доказательство.* Ввиду (17.6), остается только доказать сюръективность $\iota_D$. Пусть $\lambda\in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$, $\lambda\neq 0$. Мы хотим показать, что $\lambda$ лежит в образе $\iota_D$.

Пусть $P$ — дивизор с $\deg P=1$. Для натурального числа $n$ мы полагаем

$$D_n:=D-nP.$$

Обозначим через $\Lambda\subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ векторное подпространство всех линейных форм вида $\psi\lambda$, $\psi\in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$. По лемме 17.8, $\Lambda$ изоморфно $H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ и, таким образом, по теореме Римана — Роха,

$$\dim\Lambda\geqslant 1-g+n \qquad (g\text{ — род } X).$$

По лемме 17.4, для векторного подпространства $\operatorname{Im}(\iota_{D_n}) \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ имеем

$$\dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geqslant n + k_0 - \deg D.$$

Для $n > \deg D$ у нас $\deg D_n < 0$, значит, $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$ и из теоремы Римана — Роха следует, что

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg D_n = n + (g - 1 - \deg D).$$

Поэтому, выбирая $n$ достаточно большим, получаем

$$\dim \Lambda + \dim \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) > \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.$$

Из этого следует, что $\Lambda \cap \operatorname{Im}(\iota_{D_n}) \neq 0$. Таким образом, существуют $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$, $\psi \neq 0$, и $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ с $\psi\lambda = \iota_{D_n}(\omega)$. Пусть $A := (\psi)$ — дивизор $\psi$, т. е. $1/\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_A)$, и $D' := D_n - A$. Тогда

$$i^D_{D'}(\lambda) = \frac{1}{\psi}(\psi\lambda) = \frac{1}{\psi}\iota_{D_n}(\omega) = \iota_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right).$$

Из леммы 17.7 следует, что $\omega_0 := \frac{1}{\psi}\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ и $\lambda = \iota_D(\omega_0)$, ч. т. д.

**17.10. Замечание.** Обычно из теоремы двойственности Серра используется только равенство размерностей

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D}).$$

В частности, для $D = 0$ получаем

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega).$$

Таким образом, род компактной римановой поверхности $X$ равен максимальному числу линейно независимых голоморфных дифференциальных форм на $X$.

Теорему Римана — Роха можно теперь сформулировать следующим образом:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) - \dim H^0(X, \Omega_D) = 1 - g - \deg D,$$

или словами: на компактной римановой поверхности рода $g$ максимальное число линейно независимых мероморфных функций, кратных дивизору $D$, минус максимальное число линейно независимых мероморфных дифференциальных форм, кратных $-D$, равно $1 - g - \deg D$.

**17.11. Предложение.** *Пусть $D$ — дивизор на компактной римановой поверхности $X$. Тогда*

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*.$$

*Доказательство.* Пусть $\omega_0 \neq 0$ — мероморфная дифференциальная форма на $X$ и $K$ — ее дивизор. Согласно (17.4),

$\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$ и $\mathcal{O}_{-D} \cong \Omega_{-D-K}$. Поэтому утверждение следует из теоремы двойственности Серра.

*Следствие.* Для $D=0$, в частности, получается

$$\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1.$$

Отсюда следует, что отображение

$$\text{Res}: H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$$

является изоморфизмом, поскольку оно не равно нулю тождественно.

**17.12. Предложение.** *Для дивизора не равной нулю мероморфной дифференциальной формы* $\omega$ *на компактной римановой поверхности рода* $g$ *справедливо соотношение*

$$\deg(\omega) = 2g-2.$$

*Доказательство.* Пусть $K=(\omega)$. По теореме Римана — Роха,

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1-g+\deg K.$$

Согласно (17.4), $\Omega \cong \mathcal{O}_K$ и, значит,

$$1-g+\deg K = \dim H^0(X, \Omega) - \dim H^1(X, \Omega) = g-1,$$

т. е. $\deg K = 2(g-1)$.

**17.13. Следствие.** *Для всякой решетки* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *тор* $\mathbb{C}/\Gamma$ *имеет род единица.*

*Доказательство.* Дифференциальная форма $dz$ на $\mathbb{C}$ индуцирует дифференциальную форму $\omega$ на $\mathbb{C}/\Gamma$, которая не имеет нулей и полюсов (см. (10.14)). Поэтому $\deg(\omega) = 2g-2 = 0$ и, значит, $g=1$.

**17.14. Формула Римана — Гурвица.** Пусть $X$, $Y$ — компактные римановы поверхности и $f: X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение. Для $x \in X$ пусть $v(f, x)$ есть кратность, с которой $f$ в точке $x$ принимает значение $f(x)$, см. (2.2) и (4.23). Мы называем число

$$b(f, x) := v(f, x) - 1$$

*порядком разветвления* $f$ в точке $x$. Таким образом, $b(f, x)=0$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ не разветвлено в $x$. Так как $X$ компактна, то имеется лишь конечное число точек $x \in X$ с $b(f, x) \neq 0$ и, значит, определено число

$$b(f) := \sum_{x \in X} b(f, x),$$

которое называется *суммарным порядком разветвления* $f$.

**Предложение.** *Пусть* $f$: $X \longrightarrow Y$ *есть* $n$-*листное голоморфное накрывающее отображение между компактными римановыми поверхностями* $X, Y$ *с суммарным порядком разветвления* $b=b(f)$. *Пусть* $g$ *есть род* $X$ *и* $g'$ — *род* $Y$. *Тогда имеет место «формула Римана—Гурвица»*

$$g = \frac{b}{2} + n(g'-1) + 1.$$

*Доказательство.* Пусть $\omega$ — отличная от нуля мероморфная дифференциальная форма на $Y$. Тогда $\deg(\omega) = 2g'-2$ и $\deg(f^*\omega) = 2g-2$.

Пусть $x \in X$ и $f(x) = y$. По предложению 2.1, найдутся координатные окрестности $(U, z)$ для $x$ и $(U', w)$ для $y$ с $z(x)=0$ и $w(y)=0$, такие, что $f$ относительно этих координат записывается как $w=z^k$ с $k=v(f, x)$. В $U'$ пусть $\omega = \psi(w)\,dw$. Тогда в $U$ имеем

$$f^*\omega = \psi(z^k)\,dz^k = kz^{k-1}\psi(z^k)\,dz.$$

Из этого следует, что

$$\operatorname{ord}_x(f^*\omega) = b(f, x) + v(f, x)\operatorname{ord}_y(\omega).$$

Так как $\sum\{v(f, x)\colon x \in f^{-1}(y)\} = n$, то для всякой точки $y \in Y$

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} b(f, x) + n\operatorname{ord}_y(\omega)$$

и, значит,

$$\deg(f^*\omega) = \sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y \in Y}\ \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{ord}_x(f^*\omega) =$$
$$= \sum_{x \in X} b(f, x) + n\sum_{y \in Y} \operatorname{ord}_y(\omega) = b(f) + n\deg(\omega).$$

Отсюда следует, что $2g-2 = b + n(2g'-2)$, и таким образом получается указанная формула.

**17.15. Накрытия числовой сферы.** Для частного случая $n$-листного накрытия $\pi$: $X \longrightarrow \mathbb{P}_1$ римановой числовой сферы с суммарным порядком разветвления $b$ мы получаем, согласно (17.14), следующую формулу для рода $g$ поверхности $X$:

$$g = \frac{b}{2} - n + 1.$$

Для двулистных накрытий над $\mathbb{P}_1$ число $b$ равно числу точек разветвления и $g = \frac{b}{2} - 1$. Компактные римановы поверхности, которые можно представить как двулистные накрытия $\mathbb{P}_1$ и род которых $>1$, называются *гиперэллиптическими поверхностями.*

Пусть, например, $\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}_1$ есть риманова поверхность $\sqrt{P(z)}$, где

$$P(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_k)$$

есть многочлен $k$-й степени с попарно различными нулями $a_j$ (см. (8.10)). Так как $b$ должно быть четным, то мы опять получаем уже доказанный ранее факт, что $X$ разветвляется над $\infty$ тогда и только тогда, когда $k$ нечетно. Род $X$ есть $g = [(k-1)/2]$ (здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое число $\leqslant x$). На $X$ можно явно задать базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$ векторного пространства голоморфных дифференциальных форм:

$$\omega_j := \frac{z^{j-1}dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant g = \left[\frac{k-1}{2}\right]$$

(здесь $z$ — лишь другое обозначение для мероморфной функции $\pi: X \longrightarrow \mathbb{P}_1$). Используя локальные координаты в критических точках, легко проверить, что $\omega_j$ всюду на $X$ голоморфны. То, что $\omega_1, \ldots, \omega_g$ линейно независимы, очевидно.

**17.16. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$ и $D$ — дивизор на $X$. Тогда*

$$H^1(X, \mathcal{O}_D) = 0, \quad \textit{если } \deg D > 2g - 2.$$

*Доказательство.* Пусть $\omega$ — отличная от нуля мероморфная дифференциальная форма на $X$ и $K$ — ее дивизор. Тогда, согласно (17.4), $\Omega_{-D} \cong \mathcal{O}_{K-D}$ и, значит, $H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \cong H^0(X, \Omega_{-D}) \cong H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$. Если $\deg D > 2g-2$, то $\deg(K-D) < 0$, и $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0$ по предложению 16.5, ч. т. д.

**17.17. Следствие.** *Для пучка $\mathcal{M}$ мероморфных функций на компактной римановой поверхности $X$*

$$H^1(X, \mathcal{M}) = 0.$$

*Доказательство.* Пусть $\xi \in H^1(X, \mathcal{M})$ есть класс когомологий, который представляется коциклом $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$. Так как в случае надобности мы можем перейти к подходящему измельчению $\mathfrak{U}$, то без ограничения общности можно считать, что $f_{ij}$ в совокупности имеют лишь конечное число полюсов. Поэтому существует дивизор $D$ с $\deg D > 2g-2$, такой, что $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$. Согласно (17.16), коцикл $(f_{ij})$ разрешим относительно пучка $\mathcal{O}_D$, а значит, и относительно $\mathcal{M}$.

*Замечание.* Пучок $\mathcal{M}^{(1)}$ мероморфных дифференциальных форм на $X$ изоморфен $\mathcal{M}$; изоморфизм $\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{(1)}$ задается соответствием $f \longmapsto f\omega$, где $\omega \neq 0$ — фиксированный элемент в $\mathcal{M}^{(1)}(X)$. Таким образом, имеем также $H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0$.

Это можно использовать для определения вычета Res: $H^1(X, \Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ из (17.1) без помощи интегралов. Пусть $\xi \in H^1(X, \Omega)$ представляется коциклом $(\omega_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$. Так как $H^1(X, \mathcal{M}^{(1)}) = 0$, то этот коцикл разрешим относительно пучка $\mathcal{M}^{(1)}$ и, значит, существует система Миттаг-Леффлера $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ с $[\delta\mu] = \xi$. Тогда, по предложению 17.3,

$$\operatorname{Res}(\xi) = \operatorname{Res}(\mu).$$

# § 18. Функции и дифференциальные формы с заданными главными частями

Классическая теорема Миттаг-Леффлера утверждает, как известно, что на комплексной плоскости для корректно заданных главных частей всегда существует мероморфная функция с этими главными частями. Обратимся теперь к аналогичной проблеме на компактных римановых поверхностях. Здесь проблема разрешима не всегда, но из теоремы двойственности Серра можно вывести необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

**18.1. Системы Миттаг-Леффлера мероморфных функций.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$. Коцепь $\mu = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ называется *системой Миттаг-Леффлера*, если разности $f_j - f_i$ голоморфны в $U_i \cap U_j$, т. е. $\delta\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Таким образом, функции $f_i$ и $f_j$ на общей области определения имеют одинаковые главные части. Под *решением* системы $\mu$ понимается глобальная мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(X)$, обладающая теми же главными частями, что и $\mu$, т. е. такая, что $f | U_i - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$ для всех $i \in I$. Мы обозначаем через $[\delta\mu] \in H^1(X, \mathcal{O})$ класс когомологий, представляемый коциклом $\delta\mu$.

**Предложение.** *Система Миттаг-Леффлера* $\mu$ *разрешима тогда и только тогда, когда* $[\delta\mu] = 0$.

*Доказательство.* (a) Пусть $f \in \mathcal{M}(X)$ — решение для $\mu = (f_i)$. Положим $g_i := f_i - f \in \mathcal{O}(U_i)$. Тогда на $U_i \cap U_j$

$$f_j - f_i = g_j - g_i.$$

Это означает, что коцикл $\delta\mu = f_j - f_i$ лежит в $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$, т. е. $[\delta\mu] = 0$.

(b) Пусть $[\delta\mu] = 0$ и, значит, $\delta\mu \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Тогда существует коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ с

$$f_j - f_i = g_j - g_i \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Отсюда следует, что $f_i - g_i = f_j - g_j$ на $U_i \cap U_j$ и, значит, $f_i - g_i$ образуют глобальную мероморфную функцию $f \in \mathcal{M}(X)$. Так как $f \mid U_i - f_i = -g_i \in \mathcal{O}(U_i)$, то $f$ есть решение для $\mu$.

*Замечание.* Согласно (17.17), для всякой компактной римановой поверхности $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$. Отсюда следует, что для каждого класса когомологий $\xi \in H^1(X, \mathcal{O})$ существует система Миттаг-Леффлера $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ с $\xi = [\delta\mu]$ (для подходящего покрытия $\mathfrak{U}$). Поэтому на всякой компактной римановой поверхности рода $\geqslant 1$ существует неразрешимая система Миттаг-Леффлера. Напротив, на римановой числовой сфере, поскольку $H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}) = 0$, всякая система Миттаг-Леффлера разрешима; это также легко доказать непосредственно.

**18.2.** Пусть теперь $X$ — компактная риманова поверхность и $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ — система Миттаг-Леффлера мероморфных функций на $X$. Тогда для всякой голоморфной дифференциальной формы $\omega \in \Omega(X)$ произведение $\omega\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$ является системой Миттаг-Леффлера дифференциальных форм и, таким образом, согласно (17.2), определен вычет $\operatorname{Res}(\omega\mu)$. Теперь мы можем сформулировать обещанный критерий разрешимости $\mu$.

**Предложение.** *Система Миттаг-Леффлера мероморфных функций* $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ *на компактной римановой поверхности* $X$ *разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Res}(\omega\mu) = 0 \quad \textit{для всех} \quad \omega \in \Omega(X).$$

*Доказательство.* Элемент $[\delta\mu] \in H^1(X, \mathcal{O})$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\lambda([\delta\mu]) = 0$ для всех $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O})^*$. А это, по теореме двойственности Серра, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\langle\omega, [\delta\mu]\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega(X).$$

По предложению 17.3, $\langle\omega, [\delta\mu]\rangle = \operatorname{Res}(\omega[\delta\mu]) = \operatorname{Res}(\omega\mu)$. Поэтому утверждение следует из предложения 18.1.

*Замечания.* (a) Если $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в $\Omega(X)$, то $\operatorname{Res}(\omega\mu) = 0$ для всех $\omega \in \Omega(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Res}(\omega_k\mu) = 0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, g.$$

Таким образом, разрешимость для $\mu$ эквивалентна выполнению $g$ линейных уравнений, где $g$ — род $X$.

(b) Если $\mu$ разрешима и $f_1, f_2 \in \mathcal{M}(X)$ — два ее решения, то функция $f_1 - f_2$ голоморфна на $X$ и, значит, постоянна. Поэтому решение определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

**18.3. Применение к двоякопериодическим функциям.** Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и

$$P := \{t_1\gamma_1 + t_2\gamma_2 \colon 0 \leqslant t_1 < 1,\ 0 \leqslant t_2 < 1\}.$$

В точках $a_1, \ldots, a_n \in P$ пусть заданы главные части

$$\sum_{\nu=-r_j}^{-1} c_\nu^{(j)} (z - a_j)^\nu, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Двоякопериодическая относительно $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$ мероморфная функция $f \in \mathscr{M}(\mathbb{C})$ с полюсами $a_1, \ldots, a_n$ и с заданными в них главными частями существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} c_{-1}^{(j)} = 0.$$

*Доказательство.* Двоякопериодическую относительно $\Gamma$ функцию можно рассматривать как функцию на торе $X = \mathbb{C}/\Gamma$. Заданные главные части порождают на $X$ систему Миттаг-Леффлера $\mu$. Дифференциальная форма $\omega$ на $X$, которая индуцируется дифференциальной формой $dz$ на $\mathbb{C}$ (см. (10.14)), образует базис в $\Omega(X)$, так как $\dim \Omega(X) = 1$. Имеем

$$\operatorname{Res}(\omega\mu) = \sum_{j=1}^{n} c_{-1}^{(j)},$$

и отсюда следует утверждение.

Из этого, в частности, следует, что не существует двоякопериодической относительно $\Gamma$ мероморфной функции, которая в параллелограмме периодов $P$ имеет ровно один полюс первого порядка, так как тогда вычет был бы отличен от нуля (см. (5.7с)).

Теперь мы хотим обратиться к проблеме существования на римановой поверхности рода $g > 1$ мероморфных функций, которые в некоторой точке имеют полюс порядка $\leqslant g$, а в остальном голоморфны. Для этого нам нужны некоторые заготовки.

**18.4. Определитель Вронского.** Пусть $f_1, \ldots, f_g$ — голоморфные функции в области $U \subset \mathbb{C}$. Определителем Вронского для $f_1, \ldots, f_g$ называется определитель матрицы из производных $f_k^{(m)}$, $m = 0, \ldots, g-1$, $k = 1, \ldots, g$,

$$W(f_1, \ldots, f_g) := \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_g \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_g' \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_1^{(g-1)} & f_2^{(g-1)} & \cdots & f_g^{(g-1)} \end{pmatrix}.$$

Если функции $f_1, \ldots, f_g$ линейно независимы над $\mathbb{C}$, то определитель Вронского не равен нулю тождественно. Это доказывается так. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение для неизвестной функции $w$:

$$\det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_g & w \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_g' & w' \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ f_1^{(g)} & f_2^{(g)} & \ldots & f_g^{(g)} & w^{(g)} \end{pmatrix} = 0.$$

Функции $f_1, \ldots, f_g$ являются решениями этого дифференциального уравнения. Разлагая определитель по последнему столбцу, получаем

$$a_0 w^{(g)} + a_1 w^{(g-1)} + \ldots + a_g w = 0,$$

где $a_0 = W(f_1, \ldots, f_g)$. Поэтому если определитель Вронского тождественно равен нулю, то функции $f_1, \ldots, f_g$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению порядка $\leqslant g-1$ и, значит, линейно зависимы.

Пусть теперь $X$ — компактная риманова поверхность рода $\geqslant 1$ и $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в $\Omega(X)$. Для координатной окрестности $(U, z)$ мы определяем голоморфную функцию $W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ на $U$ следующим образом. Дифференциальные формы $\omega_k$ можно записать в $U$ как $\omega_k = f_k\, dz$. Положим

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g) := W(f_1, \ldots, f_g),$$

где справа производные функций $f_k$ берутся относительно $z$. Как ведет себя определитель Вронского для $\omega_1, \ldots, \omega_g$ при замене координат, показывает следующее предложение.

**18.5. Предложение.** *Пусть $(U, z)$ и $(\tilde{U}, \tilde{z})$ — две координатные окрестности на $X$. Тогда в $U \cap \tilde{U}$ имеем*

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \left(\frac{d\tilde{z}}{dz}\right)^N W_{\tilde{z}}(\omega_1, \ldots, \omega_g), \quad \textit{где} \quad N = \frac{g(g+1)}{2}.$$

*Доказательство.* Положим $\psi := \frac{d\tilde{z}}{dz} \in \mathcal{O}^*(U \cap \tilde{U})$. Пусть функции $f_k$ и $\tilde{f}_k$ в $U \cap \tilde{U}$ определяются условием

$$\omega_k = f_k\, dz = \tilde{f}_k\, d\tilde{z}.$$

Тогда $f_k = \psi \tilde{f}_k$. Далее, индукцией по $m$ доказывается, что

$$\frac{d^m f_k}{dz^m} = \psi^{m+1} \frac{d^m \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^m} + \sum_{\mu=0}^{m-1} \varphi_{m\mu} \frac{d^\mu \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^\mu},$$

где $\varphi_{m\mu}$ — не зависящие от $k$ голоморфные функции в $U \cap \tilde{U}$. Отсюда получается, что

$$\det\left(\frac{d^m f_k}{dz^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1\\ k=1,\ldots,g}} = \det\left(\psi^{m+1}\frac{d^m \tilde{f}_k}{d\tilde{z}^m}\right)_{\substack{m=0,\ldots,g-1\\ k=1,\ldots,g}}.$$

Так как $1+2+\ldots+g=\frac{g(g+1)}{2}$, то из этого следует утверждение.

Если $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_g$ — другой базис в $\Omega(X)$, то существуют константы $c_{jk} \in \mathbb{C}$ с $\det(c_{jk}) =: c \neq 0$, такие, что $\omega_j = \sum_k c_{jk}\tilde{\omega}_k$. Тогда

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g) = cW_z(\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_g).$$

Поэтому следующее определение имеет смысл (т. е. не зависит от выбора базиса в $\Omega(X)$ и от локальных координат).

**18.6. Определение.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$. Точка $p \in X$ называется *точкой Вейерштрасса*, если для некоторого базиса $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в $\Omega(X)$ и некоторой координатной окрестности $(U, z)$ точки $p$ определитель Вронского $W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ в $p$ обращается в нуль. Порядок этого нуля называется кратностью точки Вейерштрасса. Риманова поверхность рода 0, т. е. $\mathbb{P}_1$, по определению, не имеет точек Вейерштрасса.

**18.7. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$ и $p$ — точка на $X$. Непостоянная мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(X)$ с полюсом порядка $\leqslant g$ в $p$ и голоморфная в $X \setminus \{p\}$ существует тогда и только тогда, когда $p$ есть точка Вейерштрасса.*

*Доказательство.* Мы применим критерий из предложения 18.2. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ есть базис в $\Omega(X)$ и $(U, z)$ — координатная окрестность $p$ с $z(p)=0$. Форму $\omega_k$ в окрестности $p$ можно разложить в ряд

$$\omega_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k\nu} z^\nu \, dz, \qquad k=1, \ldots, g.$$

Искомая функция $f$ имеет в $p$ главную часть вида

$$h = \sum_{\nu=0}^{g-1} \frac{c_\nu}{z^{1+\nu}}, \quad (c_0, \ldots, c_{g-1}) \neq (0, \ldots, 0),$$

и, таким образом, является решением системы Миттаг-Леффлера

$$\mu = (h, 0) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}), \quad \mathfrak{U} = (U, X \setminus \{p\}).$$

Далее,

$$\operatorname{Res}(\omega_k \mu) = \operatorname{Res}_p(\omega_k h) = \sum_{\nu=0}^{g-1} a_{k\nu} c_\nu.$$

Уравнение $\operatorname{Res}_p(\omega_k h) = 0$ имеет нетривиальное решение $(c_0, \ldots \ldots, c_{g-1})$ тогда и только тогда, когда $\det(a_{k\nu}) = 0$. Но это равносильно тому, что

$$W_z(\omega_1, \ldots, \omega_g)(p) = 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

**18.8. Предложение.** *На компактной римановой поверхности $X$ рода $g$ имеется с учетом кратностей всего $(g-1)g(g+1)$ точек Вейерштрасса.*

*Доказательство.* Пусть $(U_i, z_i)$, $i \in I$, есть покрытие $X$ координатными окрестностями. В $U_i \cap U_j$ функция $\psi_{ij} := \frac{dz_j}{dz_i}$ голоморфна и не имеет нулей. Относительно фиксированного базиса $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в $\Omega(X)$ пусть

$$W_i := W_{z_i}(\omega_1, \ldots, \omega_g) \in \mathcal{O}(U_i).$$

По предложению 18.5, имеем

$$(1) \qquad W_i = \psi_{ij}^N W_j \quad \text{в} \quad U_i \cap U_j, \quad \text{где } N = \frac{g(g+1)}{2}.$$

Равенство $D(x) := \operatorname{ord}_x(W_i)$ для $x \in U_i$ определяет дивизор $D$ на $X$, который в точках Вейерштрасса поверхности $X$ указывает их кратности. Таким образом, $\deg D$ есть общее число точек Вейерштрасса.

Пусть $D_1$ — дивизор $\omega_1$. По предложению 17.12, имеем $\deg D_1 = 2g-2$. Полагая $\omega_1 = f_{1i}\,dz_i$ в $U_i$, получаем $D_1(x) = \operatorname{ord}_x(f_{1i})$ для всех $x \in U_i$. Кроме того,

$$(2) \qquad f_{1i} = \psi_{ij} f_{1j} \quad \text{в} \quad U_i \cap U_j.$$

Из (1) и (2) следует, что

$$W_i f_{1i}^{-N} = W_j f_{1j}^{-N} \quad \text{в} \quad U_i \cap U_j.$$

Таким образом, существует глобальная мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(X)$ с $f \mid U_i = W_i f_{1i}^{-N}$. Для дивизора функции $f$ имеем

$$(f) = D - ND_1.$$

Так как $\deg(f) = 0$, то

$$\deg D = N \deg D_1 = \frac{g(g+1)}{2}(2g-2) = (g-1)g(g+1),$$

что и требовалось доказать.

**18.9. Следствие.** *Для всякой компактной римановой поверхности $X$ рода $g \geqslant 2$ существует голоморфное накрывающее отображение $f$: $X \to \mathbb{P}_1$ с числом листов $\leqslant g$. В частности, всякая компактная риманова поверхность рода* 2 *гиперэллиптическая.*

*Замечание.* Можно даже доказать, что компактную риманову поверхность рода $g \geqslant 2$ можно рассматривать как накрытие над $\mathbb{P}_1$ с числом листов $[(g+3)/2]$ или меньше, см. [57].

**18.10. Дифференциальные формы с заданными главными частями.** Пусть $X$ — риманова поверхность, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — ее открытое покрытие и $\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$ — система Миттаг-Леффлера мероморфных дифференциальных форм на $X$, см. (17.2). Под *решением* $\mu$ понимается глобальная мероморфная дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{M}^{(1)}(X)$, имеющая те же главные части, что и $\mu$, т. е. $\omega | U_i - \omega_i \in \Omega(U_i)$ для всех $i \in I$. Как доказано в (18.1), система $\mu$ разрешима тогда и только тогда, когда класс когомологий $[\delta\mu] \in H^1(X, \Omega)$ равен нулю.

**18.11. Предложение.** *На компактной римановой поверхности $X$ система Миттаг-Леффлера $\mu \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{M}^{(1)})$ мероморфных дифференциальных форм разрешима тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Res}(\mu) = 0$.

*Доказательство.* По предложению 17.3, $\operatorname{Res}(\mu) = \operatorname{Res}([\delta\mu])$. Так как, согласно следствию 17.11, отображение Res: $H^1(X, \Omega) \to \mathbb{C}$ является изоморфизмом, то $[\delta\mu] = 0$ равносильно условию $\operatorname{Res}(\mu) = 0$. Отсюда следует утверждение.

**18.12. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность.*

(a) *Для всякой точки $p \in X$ и для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существует мероморфная дифференциальная форма на $X$, которая в точке $p$ имеет полюс $n$-го порядка, а в остальном голоморфна («элементарный дифференциал второго рода»).*

(b) *Для любых двух точек $p_1, p_2 \in X$, $p_1 \neq p_2$, существует мероморфная дифференциальная форма на $X$, которая в $p_1$ и $p_2$ имеет полюсы первого порядка с вычетами $+1$ и $-1$ соответственно, а в остальном голоморфна («элементарный дифференциал третьего рода»).*

## § 19. Гармонические дифференциальные формы

Используя полученные выше результаты, теперь уже нетрудно доказать важнейшие теоремы о гармонических дифференциальных формах на компактных римановых поверхностях $X$. В частности, всякую замкнутую дифференциальную форму на $X$ можно однозначно записать как сумму гармонической и точной дифференциальных форм. Из этого следует, что первая группа де Рама поверхности $X$ изоморфна векторному пространству гармонических дифференциальных форм на $X$. Далее, род поверхности является топологическим инвариантом.

**19.1. Комплексное сопряжение.** Для дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ на римановой поверхности $X$ можно определить сопряженную комплексную дифференциальную форму $\bar{\omega} \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$, которая индуцируется комплексным сопряжением функций. Локально, если $\omega = \sum f_j dg_j$ с дифференцируемыми функциями $f_j$, $g_j$, то $\bar{\omega} = \sum \bar{f}_j d\bar{g}_j$. Дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ называется вещественной, когда $\omega = \bar{\omega}$. В общем случае вещественная часть дифференциальной формы $\omega$ определяется по формуле

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega}).$$

Очевидно, $\omega$ вещественна тогда и только тогда, когда $\omega = \operatorname{Re}(\omega)$. Если $c$ — кривая на $X$, то

$$\overline{\int_c \omega} = \int_c \bar{\omega}, \quad \text{и, значит,} \quad \operatorname{Re}\left(\int_c \omega\right) = \int_c \operatorname{Re}(\omega)$$

(если $\omega$ не замкнута, то мы предполагаем, что $c$ кусочно непрерывно дифференцируема).

Если $\omega \in \Omega(X)$ — голоморфная дифференциальная форма, то $\bar{\omega}$ называется *антиголоморфной*. Векторное пространство всех антиголоморфных дифференциальных форм на $X$ мы обозначаем через $\bar{\Omega}(X)$.

**19.2. Оператор $*$.** Дифференциальную форму $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ можно однозначно разложить в сумму

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \text{где} \quad \omega_1 \in \mathscr{E}^{1,0}(X), \ \omega_2 \in \mathscr{E}^{0,1}(X).$$

Положим

$$*\omega := i(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2).$$

Отображение $*\colon \mathscr{E}^{(1)}(X) \to \mathscr{E}^{(1)}(X)$ является $\mathbb{R}$-линейным изоморфизмом; оно отображает $\mathscr{E}^{1,0}(X)$ на $\mathscr{E}^{0,1}(X)$ и наоборот.

Для $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$, $\omega_1 \in \mathscr{E}^{1,0}(X)$, $\omega_2 \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$, $f \in \mathscr{E}(X)$ выполняются следующие правила:

(a) $**\omega = -\omega$, $\overline{*\omega} = *\overline{\omega}$,

(b) $d*(\omega_1 + \omega_2) = i\partial\omega_1 - i\overline{\partial}\omega_2$,

(c) $*\partial f = i\overline{\partial} f$, $*\overline{\partial} f = -i\partial f$,

(d) $d*df = 2i\partial\overline{\partial} f$.

**19.3. Гармонические дифференциальные формы.** Дифференциальная форма $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ на римановой поверхности $X$ называется *гармонической*, если

$$d\omega = d*\omega = 0.$$

**Предложение.** *Для* $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ *следующие условия эквивалентны*:

(i) $\omega$ *гармоническая*,

(ii) $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$,

(iii) $\omega = \omega_1 + \omega_2$, *где* $\omega_1 \in \Omega(X)$, $\omega_2 \in \overline{\Omega}(X)$,

(iv) *для каждой точки* $a \in X$ *существует открытая окрестность* $U$ *и гармоническая в* $U$ *функция* $f$, *такая, что* $\omega = df$.

*Доказательство.* Эквивалентность (i), (ii) и (iii) следует непосредственно из правил в (19.2).

(i) $\Rightarrow$ (iv). Так как гармоническая дифференциальная форма, в частности, замкнута, то локально $\omega = df$ с дифференцируемой функцией $f$. Так как $0 = d*\omega = d*df = 2i\partial\overline{\partial} f$, то $f$ гармоническая.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Если $\omega = df$ и $f$ гармоническая, то $d\omega = ddf = 0$ и $d*\omega = d*df = 0$.

*Обозначение.* Векторное пространство всех гармонических дифференциальных форм на римановой поверхности $X$ мы обозначаем символом $\mathrm{Harm}^1(X)$. Таким образом,

$$\mathrm{Harm}^1(X) = \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

Отсюда следует, что на компактной римановой поверхности рода $g$

$$\dim \mathrm{Harm}^1(X) = 2g.$$

**19.4. Предложение.** *Всякая вещественная гармоническая дифференциальная форма* $\sigma \in \mathrm{Harm}^1(X)$ *является вещественной частью ровно одной голоморфной дифференциальной формы* $\omega \in \Omega(X)$.

*Доказательство.* Имеем $\sigma=\omega_1+\overline{\omega}_2$ с $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(X)$. Из равенств $\sigma=\omega_1+\overline{\omega}_2=\overline{\sigma}=\overline{\omega}_1+\omega_2$ следует, что $\omega_1=\omega_2$ и $\sigma=\operatorname{Re}(2\omega_1)$.

Докажем единственность. Пусть $\omega \in \Omega(X)$ и $\operatorname{Re}(\omega)=0$. Так как локально $\omega=df$ с голоморфной функцией $f$, то $f$ имеет постоянную вещественную часть. Тогда $f$ вообще постоянна и, значит, $\omega=0$.

**19.5. Скалярное произведение в $\mathcal{E}^{(1)}(X)$.** Теперь мы предположим, что $X$ — *компактная* риманова поверхность. Для $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ пусть

$$\langle\omega_1, \omega_2\rangle := \iint_X \omega_1 \wedge *\omega_2.$$

Очевидно, отображение $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \langle\omega_1, \omega_2\rangle$ линейно по первому и полулинейно по второму аргументу и

$$\langle\omega_2, \omega_1\rangle = \overline{\langle\omega_1, \omega_2\rangle}.$$

Покажем, что скалярное произведение $\langle\, ,\rangle$ положительно определено. Пусть $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Относительно локальной карты $(U, z)$, $z=x+iy$, пусть

$$\omega=f\,dz+g\,d\bar{z}.$$

Тогда

$$*\omega=i(\bar{f}\,d\bar{z}-\bar{g}\,dz)$$

и

$$\omega\wedge*\omega=i(|f|^2+|g|^2)\,dz\wedge d\bar{z}=2(|f|^2+|g|^2)\,dx\wedge dy.$$

Отсюда видно, что всегда $\langle\omega, \omega\rangle \geqslant 0$ и что $\langle\omega, \omega\rangle=0$ только для $\omega=0$.

Поэтому с таким скалярным произведением $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ становится унитарным векторным пространством, которое, однако, не является гильбертовым, так как оно неполно.

**19.6. Лемма.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Тогда*

(a) $\partial\mathcal{E}(X)$, $\bar{\partial}\mathcal{E}(X)$, $\Omega(X)$, $\overline{\Omega}(X)$ *суть попарно ортогональные векторные подпространства в* $\mathcal{E}^{(1)}(X)$;

(b) $d\mathcal{E}(X)$ *и* $*d\mathcal{E}(X)$ — *взаимно ортогональные векторные подпространства в* $\mathcal{E}^{(1)}(X)$ *и*

$$d\mathcal{E}(X)\oplus*d\mathcal{E}(X)=\partial\mathcal{E}(X)\oplus\bar{\partial}\mathcal{E}(X).$$

*Доказательство.* (a) Так как $\mathcal{E}^{1,0}(X)$ и $\mathcal{E}^{0,1}(X)$, очевидно, взаимно ортогональны, то достаточно показать, что $\partial\mathcal{E}(X)\perp\Omega(X)$ и $\bar{\partial}\mathcal{E}(X)\perp\overline{\Omega}(X)$.

Пусть $f \in \mathscr{E}(X)$ и $\omega \in \Omega(X)$. Тогда

$$\omega \wedge * \partial f = i\omega \wedge \overline{\bar{\partial} \bar{f}} = i\omega \wedge d\bar{f} = -id(\bar{f}\omega)$$

и, значит,

$$\langle \omega, \partial f \rangle = -i \iint_X d(\bar{f}\omega) = 0$$

по предложению 10.20. Так же доказывается, что $\langle \bar{\omega}, \bar{\partial} f \rangle = 0$.

(b) Пусть $f, g \in \mathscr{E}(X)$. Тогда

$$df \wedge *(*dg) = -df \wedge dg = -d(f\,dg)$$

и, значит,

$$\langle df, *dg \rangle = -\iint_X d(f\,dg) = 0.$$

Равенство $d\mathscr{E}(X) \oplus * d\mathscr{E}(X) = \partial\mathscr{E}(X) \oplus \bar{\partial}\mathscr{E}(X)$ следует из правила 19.2 (c).

**19.7. Следствие.** *На компактной римановой поверхности $X$ всякая точная дифференциальная форма $\sigma \in \mathrm{Harm}^1(X)$ равна нулю, а всякая гармоническая функция $f \in \mathscr{E}(X)$ постоянна.*

Это следует из того, что $d\mathscr{E}(X)$ ортогонально к $\mathrm{Harm}^1(X) = \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X)$.

**19.8. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $\sigma \in \mathrm{Harm}^1(X)$, $\omega \in \Omega(X)$. Пусть для всякой замкнутой кривой $\gamma$ на $X$*

$$\int_\gamma \sigma = 0, \quad \textit{соотв.} \ \mathrm{Re}\left(\int_\gamma \omega\right) = 0.$$

*Тогда $\sigma = 0$, соотв. $\omega = 0$.*

*Доказательство.* По предложению 10.15, форма $\sigma$, соотв. $\mathrm{Re}(\omega)$, точна. Поэтому утверждение следует из (19.7) и (19.4).

**19.9. Предложение.** *На всякой компактной римановой поверхности $X$ имеет место ортогональное разложение*

$$\mathscr{E}^{0,1}(X) = \bar{\partial}\mathscr{E}(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

*Доказательство.* Пусть $g$ есть род $X$. Так как $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathscr{E}^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathscr{E}(X)$ по теореме Дольбо (15.14), то

$$\dim \mathscr{E}^{0,1}(X)/\bar{\partial}\mathscr{E}(X) = g.$$

С другой стороны, согласно (17.10), также $\dim \bar{\Omega}(X) = g$. С учетом леммы 19.6 (a) отсюда получается наше утверждение.

**19.10. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и $\sigma \in \mathscr{E}^{0,1}(X)$. Уравнение $\bar\partial f = \sigma$ обладает решением $f \in \mathscr{E}(X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\iint_X \sigma \wedge \omega = 0 \quad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega(X).$$

Указанное условие эквивалентно именно тому, что $\sigma \perp \overline{\Omega}(X)$.

**19.11. Предложение.** *На всякой компактной римановой поверхности $X$ имеет место ортогональное разложение*

$$\mathscr{E}^{(1)}(X) = * d\mathscr{E}(X) \oplus d\mathscr{E}(X) \oplus \mathrm{Harm}^1(X).$$

*Доказательство.* Из (19.9) переходом к комплексно сопряженным формам получается, что $\mathscr{E}^{1,0}(X) = \partial\mathscr{E}(X) \oplus \Omega(X)$ и, значит,

$$\mathscr{E}^{(1)}(X) = \partial\mathscr{E}(X) \oplus \bar\partial\mathscr{E}(X) \oplus \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X).$$

Поэтому утверждение следует из (19.6).

**19.12. Предложение.** *На всякой компактной римановой поверхности $X$*

$$\mathrm{Ker}\,(\mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(2)}(X)) = d\mathscr{E}(X) \oplus \mathrm{Harm}^1(X).$$

*Доказательство.* Так как $\mathscr{Z}(X) := \mathrm{Ker}\,(\mathscr{E}^{(1)}(X) \xrightarrow{d} \mathscr{E}^{(2)}(X)) \supset$ $\supset d\mathscr{E}(X) \oplus \mathrm{Harm}^1(X)$, то, по предложению 19.11, достаточно показать, что

$$\mathscr{Z}(X) \perp * d\mathscr{E}(X).$$

Пусть $\omega \in \mathscr{Z}(X)$ и $f \in \mathscr{E}(X)$. Тогда

$$\omega \wedge *(* df) = -\omega \wedge df = d(f\omega)$$

и, значит,

$$\langle \omega, * df \rangle = \iint_X d(f\omega) = 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

**19.13. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Дифференциальная форма $\sigma \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ точна тогда и только тогда, когда для всякой замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$*

$$\iint_X \sigma \wedge \omega = 0.$$

*Доказательство.* Указанное условие эквивалентно тому, что $\langle \omega, * \sigma \rangle = 0$ для всех замкнутых дифференциальных форм $\omega$. Это в свою очередь означает, согласно (19.11), что $* \sigma \in * d\mathscr{E}(X)$, т. е. $\sigma \in d\mathscr{E}(X)$.

**19.14. Предложение** (де Рам — Ходж). *Для всякой компактной римановой поверхности* $X$

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Rh}^1(X) \cong \mathrm{Harm}^1(X).$$

Ввиду (19.12), это следует непосредственно из теоремы де Рама (15.15).

*Замечание.* Так как пучок $\mathbb{C}$ локально постоянных комплекснозначных функций на $X$ зависит только от топологической структуры $X$, то

$$b_1(X) := \dim H^1(X, \mathbb{C})$$

— *первое число Бетти* поверхности $X$ — является топологическим инвариантом. Из (19.14) следует, что

$$b_1(X) = 2g,$$

где $g$ — род поверхности $X$. Таким образом, род тоже является топологическим инвариантом.

Имеется топологическая классификация связных ориентируемых компактных двумерных многообразий (римановы поверхности ориентируемы), которая зависит только от первого числа Бетти. Всякая такая поверхность $X$ с $b_1(X) = 2g$ гомеоморфна сфере с $g$ ручками (см. Зейферт — Трельфалль [45]).

Заметим еще, что для каждого рода $\geqslant 1$ существуют римановы поверхности, которые, будучи гомеоморфными, не являются биголоморфно эквивалентными. Классы биголоморфно эквивалентных римановых поверхностей рода $g$ зависят в случае $g = 1$ от одного, а в случае $g \geqslant 2$ от $3g - 3$ комплексных параметров. Однако мы не можем останавливаться на так называемой теории Тейхмюллера, в которой изучаются подобные вопросы; см. [50].

## § 20. Теорема Абеля

В этом параграфе мы изучаем вопрос о том, на каких компактных римановых поверхностях $X$ существуют мероморфные функции с заданными нулями и полюсами. Очевидно, для этого необходимо, чтобы суммарный порядок нулей равнялся суммарному порядку полюсов. Однако на римановых поверхностях рода $\geqslant 1$ это условие не является достаточным. Необходимое и достаточное условие существования таких функций дает теорема Абеля.

**20.1. Функции с заданными дивизорами.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $D$ — дивизор на $X$. Под *решением* $D$ понимается мероморфная функция $f \in \mathscr{M}(X)$ с $(f) = D$. Нули и

полюсы такой функции $f$ описываются как раз дивизором $D$. Если $X$ компактна, то $D$ может иметь решение только тогда, когда $\deg D = 0$.

Нам понадобится еще понятие слабого решения $D$. Пусть

$$X_D := \{x \in X: \ D(x) \geqslant 0\}.$$

*Слабым решением* $D$ называется функция $f \in \mathscr{E}(X_D)$ со следующим свойством: для каждой точки $a \in X$ существуют координатная окрестность $(U, z)$ с $z(a) = 0$ и функция $\psi \in \mathscr{E}(U)$ с $\psi(a) \neq 0$, такие, что

$$(*) \qquad f = \psi z^k \quad \text{в} \quad U \cap X_D, \quad \text{где} \quad k = D(a).$$

Очевидно, слабое решение $f$ является настоящим, т. е. мероморфным, решением тогда и только тогда, когда $f$ голоморфна в $X_D$. Два слабых решения $f$, $g$ для $D$ отличаются на множитель $\varphi \in \mathscr{E}(X)$, нигде не равный нулю.

Пусть $f_1$ и $f_2$ — слабые решения $D_1$ и $D_2$ соответственно; тогда $f := f_1 f_2$ есть слабое решение дивизора $D := D_1 + D_2$. При этом произведение $f_1 f_2$ непрерывно продолжается в точки $a \in X$ с

$$D(a) \geqslant 0, \quad \text{но } D_1(a) < 0 \text{ или } D_2(a) < 0,$$

в которых оно сначала не определено. Аналогично, $f_1/f_2$ является слабым решением дивизора $D_1 - D_2$.

**20.2. Логарифмическая производная.** Пусть $f$ — слабое решение дивизора $D$. Тогда логарифмическая производная $df/f$ является дифференциальной формой в дополнении к

$$\operatorname{Supp}(D) = \{x \in X: \ D(x) \neq 0\}.$$

Если $a \in \operatorname{Supp}(D)$ и $k = D(a)$, то с учетом $(*)$ имеется представление

$$\frac{df}{f} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi},$$

форма $d\psi/\psi$ дифференцируема в окрестности $a$ и, значит, не имеет там особенностей. Отсюда, как в (13.1), следует, что для всякой дифференциальной формы $\sigma \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ с компактным носителем существует интеграл

$$\iint\limits_X \frac{df}{f} \wedge \sigma.$$

Для дальнейшего мы еще отметим, что дифференциальная форма $\bar{\partial} f/f$ дифференцируема на всем $X$, так как из локального представления $f = \psi z^k$ следует, что $\bar{\partial} f/f = \bar{\partial}\psi/\psi$.

**20.3. Лемма.** *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные точки на римановой поверхности $X$ и $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Пусть $D \in \operatorname{Div}(X)$ есть дивизор с $D(a_j) = k_j$ для $j = 1, \ldots, n$, а в остальном $D(x) = 0$.*

*Пусть $f$ есть слабое решение $D$. Тогда для всякой функции $g \in \mathscr{E}(X)$ с компактным носителем*

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j).$$

*Доказательство.* Выберем непересекающиеся координатные окрестности $(U_j, z_j)$ точек $a_j$ с $z_j(a_j) = 0$ так, чтобы $f$ в $U_j$ можно было записать в виде

$$f = \psi_j z_j^{k_j}, \quad \text{где} \quad \psi_j \in \mathscr{E}(U_j),\ \psi_j(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in U_j.$$

Можно считать, что $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ — единичный круг ($j = 1, \ldots, n$).

Пусть $0 < r_1 < r_2 < 1$. Существуют функции $\varphi_j \in \mathscr{E}(X)$, такие, что

$$\operatorname{Supp}(\varphi_j) \subset \{|z_j| < r_2\} \quad \text{и} \quad \varphi_j \mid \{|z_j| \leqslant r_1\} = 1.$$

Пусть $g_j := \varphi_j g$ для $j = 1, \ldots, n$ и $g_0 := g - (g_1 + \ldots + g_n)$. Так как $\operatorname{Supp}(g_0)$ компактно принадлежит $X' := X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, то, согласно (10.20),

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg_0 = -\iint_{X'} d\left(g_0 \frac{df}{f}\right) = 0$$

и, значит,

$$\iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} \iint_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=1}^{n} k_j \iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j.$$

Далее, по теореме Стокса,

$$\iint_{U_j} \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j = -\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\varepsilon \leqslant |z_j| \leqslant r_2} d\left(g_j \frac{dz_j}{z_j}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z_j| = \varepsilon} g_j \frac{dz_j}{z_j} = 2\pi i g_j(a_j) = 2\pi i g(a_j), \quad \text{ч. т. д.}$$

**20.4. Цепи, циклы, гомологии.** Под *1-цепью* на римановой поверхности $X$ понимается формальная конечная целочисленная линейная комбинация

$$c = \sum_{j=1}^{k} n_j c_j, \qquad n_j \in \mathbb{Z},$$

кривых $c_j$: $[0, 1] \to X$. Для замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ интеграл по $c$ определяется формулой

$$\int_c \omega := \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{c_j} \omega.$$

Множество всех 1-цепей на $X$, которое естественным образом составляет абелеву группу, мы обозначаем через $C_1(X)$. Граничный оператор

$$\partial\colon\; C_1(X) \to \mathrm{Div}(X)$$

определяется теперь следующим образом. Пусть $c$: $[0, 1] \to X$ — кривая; тогда полагают $\partial c = 0$, если $c(0) = c(1)$, а в противном случае $\partial c$ есть дивизор, который в $c(1)$ принимает значение $+1$, в $c(0)$ — значение $-1$, а в остальном равен нулю. Для общей 1-цепи $c = \sum n_j c_j$ пусть $\partial c := \sum n_j\, \partial c_j$. Очевидно,

$$\deg(\partial c) = 0 \quad \text{для всех} \quad c \in C_1(X).$$

Обратно, на компактной римановой поверхности для всякого дивизора $D$ с $\deg D = 0$ существует 1-цепь $c$ с $\partial c = D$. В самом деле, дивизор $D$ степени нуль можно записать в виде суммы $D = D_1 + \ldots + D_k$, где каждый $D_j$ принимает только в одной точке $b_j$ значение $+1$, в одной точке $a_j$ значение $-1$, а в остальном равен нулю. Пусть $c_j$ — кривая из $a_j$ в $b_j$ и $c := c_1 + \ldots + c_k$. Тогда $\partial c = D$.

Ядро отображения $\partial$

$$Z_1(X) := \mathrm{Ker}\,(C_1(X) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Div}(X))$$

называется группой *1-циклов* на $X$. В частности, всякая замкнутая кривая является 1-циклом.

Два цикла $c, c' \in Z_1(X)$ называются *гомологичными*, когда для каждой замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$

$$\int_c \omega = \int_{c'} \omega.$$

Множество всех гомологических классов 1-циклов образует аддитивную группу $H_1(X)$ — *первую группу гомологий* поверхности $X$. Для $\gamma \in H_1(X)$ и замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ корректно определен интеграл $\int_\gamma \omega$.

Две замкнутые гомотопные кривые, в частности, гомологичны. Поэтому имеет место гомоморфизм групп $\pi_1(X) \to H_1(X)$. Легко убедиться, что это отображение сюръективно. Однако оно, вообще говоря, не инъективно, так как фундаментальная группа $\pi_1(X)$ не всегда абелева.

**20.5. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $c$: $[0, 1] \to X$ — кривая и $U$ — относительно компактная открытая окрестность множества $c([0, 1])$. Тогда существует слабое решение $f$ дивизора $\partial c$ с $f \mid X \setminus U = 1$, такое, что для всякой замкнутой дифференциальной формы $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$*

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

*Замечание.* Так как $\frac{df}{f} = 0$ в $X \setminus U$, то интеграл по $X$ существует.

*Доказательство.* (a) Сначала рассмотрим случай, когда $(U, z)$ — координатная окрестность на $X$, такая, что $z(U) \subset \mathbb{C}$ — единичный круг и кривая $c$ целиком лежит в $U$. Мы отождествляем $U$ с единичным кругом.

Пусть $a := c(0)$ и $b := c(1)$. Существует $r < 1$, такое, что $c([0, 1]) \subset \{|z| < r\}$. Функция $\log \frac{z-b}{z-a}$ имеет однозначную ветвь в $\{r < |z| < 1\}$. Выберем функцию $\psi \in \mathscr{E}(U)$ с $\psi \mid \{|z| \leqslant r\} = 1$ и $\psi \mid \{|z| \geqslant r'\} = 0$, где $r < r' < 1$, и определим $f_0 \in \mathscr{E}(U \setminus a)$ условием

$$f_0 = \begin{cases} \exp\left(\psi \log \frac{z-b}{z-a}\right) & \text{при} \quad r < |z| < 1, \\ \frac{z-b}{z-a} & \text{при} \quad |z| \leqslant r. \end{cases}$$

Так как $f_0 \mid \{r' < |z| < 1\} = 1$, то $f_0$ можно продолжить единицей на $X \setminus U$ до функции $f \in \mathscr{E}(X \setminus a)$, которая по построению является слабым решением дивизора $\partial c$. Пусть теперь $\omega \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ — замкнутая дифференциальная форма. Так как $\omega$ имеет в $U$ первообразную, то существует функция $g \in \mathscr{E}(X)$ с компактным носителем, такая, что $\omega = dg$ в $\{|z| \leqslant r'\}$. Тогда из леммы 20.3 следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \frac{df}{f} \wedge dg = g(b) - g(a) = \int_c \omega.$$

(b) В общем случае существует разбиение

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

интервала $[0, 1]$ и координатные окрестности $(U_j, z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, на $X$ со следующими свойствами:

(i) $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \subset U$,

(ii) $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ — единичный круг.

Обозначим через $c_j$ кривую $c\,|\,[t_{j-1}, t_j]$; тогда, согласно (а), можно построить слабое решение $f_j$ дивизора $\partial c_j$ с $f_j\,|\,X\setminus U_j=1$ и

$$\int_{c_j}\omega=\frac{1}{2\pi i}\iint_X\frac{df_j}{f_j}\wedge\omega$$

для всех замкнутых дифференциальных форм $\omega\in\mathscr{E}^{(1)}(X)$. Произведение $f:=f_1\ldots f_n$ удовлетворяет всем условиям леммы.

**20.6. Следствие.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность. Тогда для всякой замкнутой кривой $\alpha$ на $X$ существует ровно одна гармоническая дифференциальная форма $\sigma_\alpha\in\mathrm{Harm}^1(X)$, такая, что*

$$\int_\alpha\omega=\iint_X\sigma_\alpha\wedge\omega$$

*для всех замкнутых дифференциальных форм $\omega\in\mathscr{E}^{(1)}(X)$.*

*Доказательство.* Пусть $f$ есть слабое решение дивизора $\partial\alpha=0$, которое удовлетворяет условиям леммы 20.5. Так как $f$ нигде не обращается в нуль, то $df/f$ дифференцируема на всем $X$ и замкнута. По предложению 19.12, существуют дифференциальная форма $\sigma_\alpha\in\mathrm{Harm}^1(X)$ и функция $g\in\mathscr{E}(X)$, такие, что

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{df}{f}=\sigma_\alpha+dg.$$

Если $\omega\in\mathscr{E}^{(1)}(X)$ замкнута, то $dg\wedge\omega=d(g\omega)$ и, значит, по предложению 10.20,

$$\int_\alpha\omega=\frac{1}{2\pi i}\iint_X\frac{df}{f}\wedge\omega=\iint_X\sigma_\alpha\wedge\omega.$$

Докажем единственность. Если $\sigma'\in\mathrm{Harm}^1(X)$ — другое решение задачи, то для разности $\tau:=\sigma_\alpha-\sigma'$ имеем

$$\iint_X\tau\wedge\omega=0\quad\text{для всех замкнутых }\omega\in\mathscr{E}^{(1)}(X).$$

В частности, можно взять $\omega=*\tau$, откуда следует, что $\langle\tau,\tau\rangle=0$, т. е. $\tau=\sigma_\alpha-\sigma'=0$, ч. т. д.

**20.7. Теорема Абеля.** *Пусть $D$ — дивизор на компактной римановой поверхности $X$ с $\deg D=0$. Тогда $D$ разрешим в том и только том случае, когда существует 1-цепь $c\in C_1(X)$ с $\partial c=D$, такая, что*

$$(*)\qquad\int_c\omega=0\quad\textit{для всех}\quad\omega\in\Omega(X).$$

*Замечание.* Условие $\int\limits_c \omega=0$ надо, конечно, проверять только для некоторого базиса в $\Omega(X)$. Если $\gamma\in C_1(X)$ — произвольная 1-цепь с $\partial\gamma=D$, то это условие можно еще выразить так: существует цикл $\alpha\in Z_1(X)$ (а именно, $\alpha=\gamma-c$), такой, что для некоторого базиса $\omega_1, \ldots, \omega_g$ в $\Omega(X)$

$$\int\limits_\gamma \omega_j=\int\limits_\alpha \omega_j, \qquad j=1, \ldots, g.$$

*Доказательство.* (a) Сначала мы покажем, что это условие достаточно. Пусть $c\in C_1(X)$ есть 1-цепь, удовлетворяющая условиям $\partial c=D$ и (*). По лемме 20.5, существует слабое решение $f$ дивизора $D$, такое, что

$$\int\limits_c \omega=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_X \frac{df}{f}\wedge\omega \quad \text{для всех} \quad \omega\in\mathscr{E}^{(1)}(X) \quad \text{с} \quad d\omega=0.$$

Для всех $\omega\in\Omega(X)$, согласно (*), имеем

$$0=\int\limits_c \omega=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_X \frac{df}{f}\wedge\omega=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_X \frac{\bar\partial f}{f}\wedge\omega.$$

Согласно замечанию в (20.2), $\sigma:=\frac{\bar\partial f}{f}\in\mathscr{E}^{0,1}(X)$. В силу (19.10), существует функция $g\in\mathscr{E}(X)$ с $\bar\partial g=\frac{\bar\partial f}{f}$. Положим

$$F:=e^{-g}f.$$

Функция $F$, как и $f$, является слабым решением $D$. Далее,

$$\bar\partial F=(\bar\partial e^{-g})f+e^{-g}\bar\partial f=-e^{-g}f\,\bar\partial g+e^{-g}\bar\partial f=0.$$

Таким образом, $F$ есть даже мероморфное решение $D$.

(b) Теперь докажем необходимость условия теоремы. Можно считать, что $D\neq 0$. Пусть $f$ — мероморфная функция на $X$ с $(f)=D$. Функция $f$ определяет $n$-листное накрытие $f\colon X\longrightarrow\mathbb{P}_1$ с некоторым $n\geqslant 1$. Пусть $a_1, \ldots, a_r\in X$ — точки разветвления $f$ и $Y:=\mathbb{P}_1\setminus\{f(a_1), \ldots, f(a_r)\}$. Для каждой дифференциальной формы $\omega\in\Omega(X)$ мы построим голоморфную дифференциальную форму $\sigma=\mathrm{Spur}(\omega)$ на $\mathbb{P}_1$ следующим образом. Каждая точка $y\in Y$ обладает открытой окрестностью $V$, такой, что $f^{-1}(V)$ есть дизъюнктное объединение открытых множеств $U_1, \ldots, U_n\subset X$ и все отображения $f\colon U_\nu\longrightarrow V$ биголоморфны. Пусть $\varphi_\nu\colon V\longrightarrow U_\nu$ есть обращение $f\colon U_\nu\longrightarrow V$, и пусть

$$\mathrm{Spur}(\omega)\,|\,V:=\varphi_1^*\omega+\ldots+\varphi_n^*\omega.$$

Проводя эту же конструкцию над открытой окрестностью $V'$ другой точки в $Y$, мы получим на пересечении ту же самую

дифференциальную форму. Как показано в (8.2), $\mathrm{Spur}(\omega)$ голоморфно продолжается на всю $\mathbb{P}_1$. Так как $\Omega(\mathbb{P}_1)=0$, то $\mathrm{Spur}(\omega)=0$.

Пусть теперь $\gamma$ есть кривая в $\mathbb{P}_1$ из $\infty$ в 0, которая (за исключением, быть может, концевых точек) целиком лежит в $Y$. Прообраз $\gamma$ относительно $f$ распадается на $n$ кривых $c_1, \ldots, c_n$, которые соединяют полюсы $f$ с ее нулями. Тогда для $c:=c_1+\ldots+c_n$ имеем $\partial c=D$ и для всех $\omega\in\Omega(X)$

$$\int_c \omega=\int_\gamma \mathrm{Spur}(\omega)=0, \quad \text{ч. т. д.}$$

**20.8. Применение к двоякопериодическим функциям.** Пусть $\gamma_1, \gamma_2\in\mathbb{C}$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и

$$P:=\{t_1\gamma_1+t_2\gamma_2:\ 0\leqslant t_1<1,\ 0\leqslant t_2<1\}.$$

Пусть заданы нули $a_1, \ldots, a_n\in P$ и полюсы $b_1, \ldots, b_n\in P$ (каждая точка считается столько раз, какова кратность). Двоякопериодическая относительно $\Gamma=\mathbb{Z}\gamma_1+\mathbb{Z}\gamma_2$ мероморфная функция, которая в $P$ имеет нулями $a_1, \ldots, a_n$, а полюсами $b_1, \ldots, b_n$, существует тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)\in\Gamma.$$

*Доказательство.* Пусть $D$ есть дивизор на $\mathbb{C}/\Gamma$, определяемый заданными нулями и полюсами в $\mathbb{C}$. Выберем кривые $c_k$ из $b_k$ в $a_k$ (например, прямолинейные отрезки). Пусть $\pi\colon\ \mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}/\Gamma$ — каноническая проекция и

$$c:=\pi\circ c_1+\ldots+\pi\circ c_n\in C_1(\mathbb{C}/\Gamma).$$

Тогда $\partial c=D$. Пусть $\omega\in\Omega(\mathbb{C}/\Gamma)$ есть дифференциальная форма на торе, индуцируемая дифференциальной формой $dz$ на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_c \omega=\sum_{k=1}^{n}\int_{c_k}dz=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k).$$

Поэтому наше утверждение получается из замечания к теореме Абеля.

## § 21. Проблема обращения Якоби

Теорема Абеля показывает, в каком случае дивизор степени нуль на компактной римановой поверхности разрешим при помощи мероморфной функции, т. е. является главным дивизором. В этом параграфе мы займемся более подробным изу-

чением структуры факторгруппы дивизоров степени нуль по модулю главных дивизоров. Оказывается, эта группа изоморфна комплексному $g$-мерному тору, где $g$ — род римановой поверхности.

**21.1. Решетки.** Пусть $V$ есть $N$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Подгруппа $\Gamma \subset V$ (относительно сложения) называется *решеткой*, если существует $N$ линейно независимых над $\mathbb{R}$ векторов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in V$, таких, что

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_N.$$

**Предложение.** *Подгруппа* $\Gamma \subset V$ *является решеткой тогда и только тогда, когда*

(i) *она дискретна, т. е. существует окрестность* $U$ *нуля в* $V$, *такая, что* $\Gamma \cap U = \{0\}$;

(ii) *она не содержится ни в каком собственном векторном подпространстве в* $V$.

*Замечание.* Вещественное $N$-мерное векторное пространство $V$ обладает однозначно определенной топологией, такой, что всякий изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ является гомеоморфизмом.

*Доказательство.* Ясно, что решетка $\Gamma \subset V$ обладает свойствами (i) и (ii). Обратно, предположим, что $\Gamma \subset V$ есть подгруппа со свойствами (i) и (ii). Мы покажем индукцией по $N = \dim_{\mathbb{R}} V$, что существуют линейно независимые векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in V$, такие, что

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_N.$$

Начало индукции $N = 0$ тривиально.

*Шаг индукции* $N - 1 \to N$. Так как $\Gamma$ не содержится ни в каком собственном векторном подпространстве в $V$, то существуют $N$ линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_N \in \Gamma$. Пусть $V_1$ есть векторное подпространство в $V$, натянутое на $x_1, \ldots, x_{N-1}$, и $\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1$. На $\Gamma_1$ можно воспользоваться предположением индукции, поэтому существуют линейно независимые векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_{N-1} \in \Gamma_1 \subset \Gamma$, такие, что

$$\Gamma_1 = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_{N-1}.$$

Каждый вектор $x \in \Gamma$ можно однозначно записать в виде

$$x = c_1(x)\gamma_1 + \ldots + c_{N-1}(x)\gamma_{N-1} + c(x)x_N$$

с вещественными коэффициентами $c_j(x)$, $c(x)$. Параллелепипед

$$P := \{\lambda_1\gamma_1 + \ldots + \lambda_{N-1}\gamma_{N-1} + \lambda x_N : \lambda_j, \lambda \in [0, 1]\}$$

есть компакт, поэтому множество $\Gamma \cap P$ конечно. Следовательно, существует вектор $\gamma_N \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1$, такой, что

$$c(\gamma_N) = \min \{c(x) \colon x \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1\} \in (0, 1].$$

Мы утверждаем теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_N$. В самом деле, пусть $x \in \Gamma$ — произвольный вектор. Тогда существуют $n_j \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$x' := x - \sum_{j=1}^{N} n_j \gamma_j = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \gamma_j + \lambda x_N,$$

где

$$0 \leqslant \lambda_j < 1 \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, N-1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \lambda < c(\gamma_N).$$

Так как $x' \in \Gamma \cap P$, то из определения $\gamma_N$ следует, что $\lambda = 0$, и, значит, $x' \in \Gamma \cap V_1 = \Gamma_1$. Поэтому все $\lambda_j$ должны быть целочисленными и, значит, нулями. Отсюда следует, что $x' = 0$, т. е.

$$x = \sum_{j=1}^{N} n_j \gamma_j \in \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_N, \quad \text{ч. т. д.}$$

**21.2. Решетка периодов.** Пусть теперь $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$ и $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис векторного пространства $\Omega(X)$ голоморфных дифференциальных форм на $X$. Определим подгруппу

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) \subset \mathbb{C}^g$$

следующим образом: $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ состоит из всех векторов

$$\left(\int_\alpha \omega_1, \int_\alpha \omega_2, \ldots, \int_\alpha \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g,$$

где $\alpha$ пробегает фундаментальную группу $\pi_1(X)$ (см. (10.11)).

*Замечание.* Имеем также (см. (20.4)):

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \left\{\left(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g\right) \colon \alpha \in H_1(X)\right\}.$$

Мы покажем, что $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ есть решетка в $\mathbb{C}^g$ (при этом $\mathbb{C}^g$ рассматривается как $2g$-мерное вещественное векторное пространство). Эта решетка называется решеткой периодов поверхности $X$ относительно базиса $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$. Для доказательства нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

**21.3. Лемма.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$. Тогда существует $g$ попарно различных точек $a_1, \ldots, a_g \in X$ со следующим свойством: всякая голоморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega(X)$, которая равна нулю во всех точках $a_1, \ldots, a_g$, равна нулю тождественно.*

*Доказательство.* Для $a \in X$ пусть

$$H_a := \{\omega \in \Omega(X): \ \omega(a) = 0\}.$$

Каждое $H_a$ либо равно $\Omega(X)$, либо имеет коразмерность единица в $\Omega(X)$. Так как пересечение всех $H_a$ есть нуль и $\Omega(X)$ имеет размерность $g$, то существуют $g$ точек $a_1, \ldots, a_g \in X$, таких, что

$$H_{a_1} \cap \ldots \cap H_{a_g} = 0.$$

Эти точки обладают требуемым свойством.

**21.4. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$ и $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в $\Omega(X)$. Тогда* $\Gamma := \operatorname{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *есть решетка в* $\mathbb{C}^g$.

*Доказательство.* (а) Выберем точки $a_1, \ldots, a_g$, как в лемме, и односвязные непересекающиеся координатные окрестности $(U_j, z_j)$ точек $a_j$ с $z_j(a_j) = 0$ для $j = 1, \ldots, g$. Относительно этих координат пусть

$$\omega_i = \varphi_{ij}\, dz_j \quad \text{в} \quad U_j.$$

Тогда из леммы 21.3 следует, что матрица

$$A := (\varphi_{ij}(a_j))_{1 \leqslant i,\, j \leqslant g}$$

имеет ранг $g$. Определим отображение

$$F\colon\ U_1 \times \ldots \times U_g \longrightarrow \mathbb{C}^g$$

следующим образом: для $x = (x_1, \ldots, x_g) \in U_1 \times \ldots \times U_g$ пусть

$$F(x_1, \ldots, x_g) = (F_1(x), \ldots, F_g(x)),$$

где

$$F_i(x) := \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i, \qquad i = 1, \ldots, g.$$

При этом интеграл $\int_{a_j}^{x_j} \omega_i$ берется вдоль какой-нибудь кривой из $a_j$ в $x_j$, лежащей в $U_j$; так как $U_j$ односвязна, то интеграл не зависит от выбора кривой.

Отображение $F$ комплексно дифференцируемо относительно координат $z_1, \ldots, z_g$, и его матрица Якоби есть

$$J_F(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}(x)\right) = (\varphi_{ij}(x_j)),$$

В точке $a=(a_1, \ldots, a_g)$ имеем $J_F(a)=A$ и, значит, эта матрица обратима. Поэтому

$$W:=F(U_1\times\ldots\times U_g)\subset\mathbb{C}^g$$

есть окрестность точки $F(a)=0$.

(b) Покажем теперь, что $\Gamma\cap W=0$. Предположим, что, напротив, существует точка $t\in\Gamma\cap(W\setminus 0)$. Тогда найдется точка

$$x=(x_1, \ldots, x_g)\in U_1\times\ldots\times U_g, \quad x\neq a,$$

такая, что $F(x)\in\Gamma$. Изменив, если понадобится, нумерацию, мы можем считать, что

$$x_j\neq a_j \quad \text{для} \quad 1\leqslant j\leqslant k \quad \text{и} \quad x_j=a_j \quad \text{для} \quad j>k$$

$(1\leqslant k\leqslant g)$. Тогда, по теореме Абеля, существует мероморфная функция $f$ на $X$, которая в точках $a_j$, $1\leqslant j\leqslant k$, имеет полюсы первого порядка, в точках $x_j$, $1\leqslant j\leqslant k$,— нули первого порядка, а в остальном голоморфна. Пусть $c_jz_j^{-1}$ есть главная часть $f$ в $a_j$ $(c_j\neq 0$ при $1\leqslant j\leqslant k)$. По теореме о вычетах (10.21),

$$0=\operatorname{Res}(f\omega_i)=\sum_{j=1}^{k}c_j\varphi_{ij}(a_j) \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, g.$$

Но это невозможно, так как матрица $(\varphi_{ij}(a_j))$ имеет ранг $g$. Поэтому предположение было неверным; одновременно доказано, что $\Gamma$ есть дискретная подгруппа в $\mathbb{C}^g$.

(c) Докажем теперь, что $\Gamma$ не содержится ни в одном собственном $\mathbb{R}$-векторном подпространстве в $\mathbb{C}^g$. В противном случае существует нетривиальная вещественная линейная форма в $\mathbb{C}^g$, которая на $\Gamma$ тождественно равна нулю. Так как всякая вещественная линейная форма в $\mathbb{C}^g$ является вещественной частью некоторой комплексной линейной формы, то найдется вектор $(c_1, \ldots, c_g)\in\mathbb{C}^g\setminus 0$, такой, что

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{g}c_j\int_{\alpha}\omega_j\right)=0 \quad \text{для всех} \quad \alpha\in\pi_1(X).$$

Отсюда, с учетом следствия 19.8, получается, что

$$\omega:=c_1\omega_1+\ldots+c_g\omega_g=0 \quad \text{— противоречие!}$$

Этим доказано, что $\Gamma$ есть решетка в $\mathbb{C}^g$.

**21.5. Замечание.** Предложение 21.4 означает, что на $X$ имеется $2g$ замкнутых кривых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$, таких, что векторы

$$\gamma_\nu:=\left(\int_{\alpha_\nu}\omega_1, \ldots, \int_{\alpha_\nu}\omega_g\right)\in\mathbb{C}^g, \quad \nu=1, \ldots, 2g,$$

линейно независимы и

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g) = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_{2g}.$$

Из этого, как легко видеть, следует, что гомологические классы кривых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ в $H_1(X)$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$ и порождают $H_1(X)$. Таким образом, $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}$.

**21.6. Многообразие Якоби и группа Пикара.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$ и $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис в $\Omega(X)$. Тогда

$$\mathrm{Jac}(X) := \mathbb{C}^g/\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$$

называется *многообразием Якоби* поверхности $X$. Мы рассматриваем здесь $\mathrm{Jac}(X)$ только как абелеву группу и не учитываем структуру компактного комплексного многообразия (комплексного $g$-мерного тора), которую можно ввести на $\mathrm{Jac}(X)$ подобно тому, как в (1.5d). Хотя определение зависит от выбора базиса $\omega_1, \ldots, \omega_g$, при другом выборе получаются изоморфные $\mathrm{Jac}(X)$.

Через $\mathrm{Div}_0(X) \subset \mathrm{Div}(X)$ обозначается подгруппа дивизоров степени 0, а через $\mathrm{Div}_H(X) \subset \mathrm{Div}_0(X)$ — подгруппа главных дивизоров. Факторгруппа

$$\mathrm{Pic}(X) := \mathrm{Div}_0(X)/\mathrm{Div}_H(X)$$

называется *группой Пикара* поверхности $X$. Определим отображение

$$\Phi\colon \mathrm{Div}_0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

следующим образом. Пусть $D \in \mathrm{Div}_0(X)$ и $c \in C_1(X)$ — цепь, такая, что $\partial c = D$. Вектор

$$\left(\int_c \omega_1, \ \ldots, \ \int_c \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g$$

определяется дивизором $D$ однозначно по модулю $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$; его класс вычетов, по определению, равен $\Phi(D)$. Очевидно, $\Phi$ есть гомоморфизм групп. Теорема Абеля (20.7) в точности означает, что ядро отображения $\Phi$ равно $\mathrm{Div}_H(X)$. Поэтому, факторизуя, мы получаем инъективное отображение

$$j\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X).$$

В проблеме обращения Якоби спрашивается, будет ли это отображение также сюръективным. Это на самом деле так.

**21.7. Предложение.** *Для всякой компактной римановой поверхности $X$ отображение*

$$j\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

*является изоморфизмом.*

*Доказательство.* Пусть $p \in \mathrm{Jac}(X)$ — какая-нибудь точка, которая представляется вектором $\xi \in \mathbb{C}^g$. Если $N$ — достаточно большое натуральное число, то вектор $\frac{1}{N}\xi$ лежит в образе отображения $F$, рассмотренного в части (а) доказательства предложения 21.4, т. е. существуют точки $a_j$, $x_j \in X$ и кривые $\gamma_j$ из $a_j$ в $x_j$ ($j=1, \ldots, g$), такие, что для $c := \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$

$$\left(\int_c \omega_1, \ \ldots, \ \int_c \omega_g\right) = \frac{1}{N}\xi.$$

Таким образом, для дивизора $D := \partial c$ имеем

$$\Phi(D) = \frac{1}{N}\xi \bmod \mathrm{Per}(\omega_1, \ \ldots, \ \omega_g).$$

Если теперь $\theta$ есть точка в $\mathrm{Pic}(X)$, представимая дивизором $ND$, то $j(\theta) = p$. Этим доказано, что $j$ сюръективно и, значит, $j$ — изоморфизм.

**21.8.** Пусть $X$ — компактная риманова поверхность рода $g$, и пусть $a_1, \ \ldots, \ a_g \in X$ — произвольно заданные точки. Определим отображение

$$\psi\colon \ X^g \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

следующим образом: для $(x_1, \ \ldots, \ x_g) \in X^g$ пусть

$$\psi(x_1, \ \ldots, \ x_g) := \sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j}) \bmod \mathrm{Div}_H(X),$$

где $D_x$ для $x \in X$ обозначает дивизор, который в $x$ принимает значение 1, а в остальном равен нулю. Пусть

$$J\colon \ X^g \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

есть композиция отображений $\psi\colon X^g \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ и $j\colon \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$. Возвращаясь к определениям, мы видим, что

$$J(x_1, \ \ldots, \ x_g) = \left(\sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant g} \bmod \mathrm{Per}(\omega_1, \ \ldots, \ \omega_g).$$

Следующее предложение усиливает (2.17).

**21.9. Предложение.** *В принятых выше обозначениях, отображение*

$$J\colon \ X^g \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$$

*сюръективно.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что $\psi\colon X^g \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ сюръективно. Это равносильно тому, что каждый дивизор

$D \in \mathrm{Div}_0(X)$ по модулю $\mathrm{Div}_H(X)$ эквивалентен некоторому дивизору вида

$$\sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j}), \qquad (x_1, \ldots, x_g) \in X^g.$$

А это можно получить следующим образом. Пусть

$$D' := D + D_{a_1} + \ldots + D_{a_g}.$$

Тогда $\deg D' = g$ и, по теореме Римана — Роха (16.9), $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \geqslant 1$. Таким образом, существует мероморфная функция $f \neq 0$ на $X$ с $(f) \geqslant -D'$, т. е.

$$D'' := (f) + D' \geqslant 0.$$

Так как $\deg D'' = g$, то имеются точки $x_1, \ldots, x_g \in X$, такие, что

$$D'' = D_{x_1} + \ldots + D_{x_g}.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j}) = D + (f), \quad \text{ч. т. д.}$$

*Замечание*. Непосредственно из определения $J\colon X^g \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ следует, что $J(x_1, \ldots, x_g)$ инвариантно относительно перестановок $x_1, \ldots, x_g$. Поэтому $J$ индуцирует отображение $S^gX \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ симметрического $g$-кратного произведения $X$ в многообразие Якоби. На $S^gX$, как и на $\mathrm{Jac}(X)$, можно ввести структуру компактного $g$-мерного комплексного многообразия, и тогда отображение $S^gX \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ станет голоморфным. Хотя оно и не биективно, все же можно показать, что оно бимероморфно, т. е. индуцирует изоморфизм полей мероморфных функций на $\mathrm{Jac}(X)$ и соотв. на $S^gX$. По этому вопросу см. [15].

**21.10. Предложение.** *Для всякой компактной римановой поверхности $X$ рода 1 отображение $J\colon X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ является изоморфизмом.*

*Замечание*. Это есть обращение следствия 17.13.

*Доказательство*. Отображение $J$ можно описать так. Пусть $\omega \in \Omega(X) \setminus 0$, $\Gamma := \mathrm{Per}(\omega)$, $a \in X$. Для $x \in X$ тогда

$$J(x) = \left(\int_a^x \omega\right) \bmod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma = \mathrm{Jac}(X).$$

Отсюда видно, что $J$ есть голоморфное отображение. Согласно (21.9), $J$ сюръективно. (Впрочем, это прямо следует также из предложения 2.7.) Отображение $J$ инъективно, так как

в противном случае по теореме Абеля на $X$ существовала бы мероморфная функция $f$ с одним-единственным полюсом первого порядка, что невозможно (тогда $X$ была бы изоморфна $\mathbb{P}_1$).

*Замечание.* Пусть $P(z)$ есть многочлен третьей или четвертой степени без кратных нулей и $X$ — риманова поверхность алгебраической функции $\sqrt{P(z)}$. Тогда $X$ имеет род 1 (см. (17.15)) и

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$$

есть базис в $\Omega(X)$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — решетка периодов для $\omega$. Тогда отображение $J\colon X \longrightarrow \operatorname{Jac}(X) = \mathbb{C}/\Gamma$ задается «эллиптическим интегралом первого рода»

$$J(x) = \int_a^x \frac{dz}{\sqrt{P(z)}} \bmod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma.$$

Пусть $F\colon \mathbb{C}/\Gamma \longrightarrow X$ есть обратное к $J$ отображение, и пусть $\pi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ и $p\colon X \longrightarrow \mathbb{P}_1$ — канонические проекции. Тогда

$$f := p \circ F \circ \pi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}_1$$

является двоякопериодической мероморфной функцией. Большим открытием Абеля и Якоби было то, что таким способом изучение эллиптических интегралов можно свести к изучению двоякопериодических функций. Обобщение этой постановки вопроса на гиперэллиптические интегралы приводит к проблеме обращения Якоби. Об истории этой проблемы см. [63].

## Глава III
# НЕКОМПАКТНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Теория функций на некомпактных римановых поверхностях во многих отношениях похожа на теорию функций в областях комплексной плоскости. Так, для некомпактных римановых поверхностей имеют место аналоги теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса, а также теоремы Римана о конформных отображениях.

В этой главе мы прежде всего обсуждаем задачу Дирихле для гармонических функций на римановых поверхностях. Это понадобится для доказательства счетности топологии римановых поверхностей, а затем еще раз для доказательства теоремы Римана об отображениях. Аппроксимационную теорему Рунге на некомпактных римановых поверхностях мы доказываем при помощи леммы Вейля. Из аппроксимационной теоремы Рунге просто выводятся теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса. Кроме того, в этой главе, в дополнение к § 10 и 11, мы обсуждаем существование голоморфных функций с заданными автоморфными слагаемыми и проблему Римана—Гильберта.

## § 22. Задача Дирихле

Доказанные выше теоремы существования для голоморфных и мероморфных функций в конечном счете основывались на лемме Дольбо (13.2) и на теореме конечности (14.9). Теперь, совсем независимо от этого, мы докажем еще одну теорему существования на римановых поверхностях, а именно теорему о существовании решения задачи Дирихле для гармонических функций; доказательство проводится методом Перрона.

**22.1.** Дифференцируемая функция $u \in \mathcal{E}(Y)$ в открытом подмножестве $Y$ римановой поверхности $X$ называется гармонической, когда $\partial\bar{\partial}u = 0$, см. (9.14). Относительно локальной координаты $z = x + iy$ это означает, что

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0,$$

Всякая вещественнозначная гармоническая функция $u$ в односвязной области $G \subset X$ является вещественной частью некоторой голоморфной функции $f \in \mathcal{O}(G)$, так как из теоремы 19.4 следует, что гармоническую дифференциальную форму $du$ можно записать в виде $du = \operatorname{Re}(dg)$ с $g \in \mathcal{O}(G)$. Отсюда получается, что $u = \operatorname{Re}(g) + \text{const}$.

Из этого легко выводится принцип максимума для гармонических функций: если гармоническая в области $Y$ функция $u\colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ принимает свой максимум в некоторой точке $x_0 \in Y$, то $u$ есть константа. В самом деле, пусть $u = \operatorname{Re}(f)$, где $f$ — голоморфная функция в окрестности $x_0$. Так как $|e^f| = e^u$, то голоморфная функция $e^f$ достигает в точке $x_0$ своего максимума модуля. Из принципа максимума для голоморфных функций следует, что в окрестности $x_0$, а значит, и на всей $Y$, функция $u$ постоянна.

**22.2.** Под задачей Дирихле на римановой поверхности $X$ понимают следующую задачу.

Пусть $Y$ — открытое множество в $X$ и $f\colon \partial Y \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Ищется непрерывная функция $u\colon \overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, гармоническая в $Y$ и такая, что $u \mid \partial Y = f$. Если $\overline{Y}$ — компакт и $\partial Y \neq \varnothing$ (т. е. $Y \neq X$), то решение, когда оно существует, определено однозначно. В самом деле, разность двух решений $u_1 - u_2$ имеет нулевые граничные значения. А тогда, по принципу максимума для гармонических функций, $0 \leqslant u_1 - u_2 \leqslant 0$ в $Y$ и, значит, $u_1 = u_2$.

Для круга

$$E(R) := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < R\}, \qquad R > 0,$$

задачу Дирихле можно просто решить при помощи *интеграла Пуассона*.

**22.3. Предложение.** *Если $f\colon \partial E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а*

$$(*)\quad u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} f(Re^{i\theta})\, d\theta \quad \text{для} \quad |z| < R$$

*и $u(z) := f(z)$ для $|z| = R$, то функция $u$ непрерывна в $\overline{E(R)}$ и гармонична в $E(R)$.*

*Доказательство.* Для $z \neq \zeta$ пусть

$$P(z, \zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}, \qquad F(z, \zeta) := \frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Тогда $P(z, \zeta) = \operatorname{Re} F(z, \zeta)$. Вместе с тем, (*) можно записать в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\theta}) f(Re^{i\theta})\, d\theta =$$
$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z, Re^{i\theta}) f(Re^{i\theta})\, d\theta\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} F(z, \zeta) f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\right).$$

Поскольку $F(z, \zeta)$ как функция от $z$ голоморфна, отсюда следует, что $u$ в $E(R)$ является вещественной частью голоморфной функции, и, значит, она гармоническая.

Остается доказать непрерывность вплоть до границы. При помощи теоремы о вычетах можно вычислить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\theta})\, d\theta = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta}\right) = 1.$$

Поэтому для $\zeta_0 \in \partial E(R)$ и $z \in E(R)$, полагая $\zeta = Re^{i\theta}$, имеем

$$u(z) - f(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, \zeta)(f(\zeta) - f(\zeta_0))\, d\theta.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $f$ непрерывна, то найдется $\delta_0 > 0$, такое, что $|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leqslant \varepsilon/2$ при $|\zeta - \zeta_0| \leqslant \delta_0$, и константа $M > 0$, такая, что $|f(\zeta)| \leqslant M$ для всех $\zeta \in \partial E(R)$. Теперь разобьем область интегрирования на две части: $\alpha$ состоит из всех $\theta \in [0, 2\pi]$ с $|Re^{i\theta} - \zeta_0| \leqslant \delta_0$, а $\beta$ есть все остальное. Тогда

$$|u(z) - f(\zeta_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\alpha P(z, \zeta)\frac{\varepsilon}{2}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_\beta P(z, \zeta)\cdot 2M\, d\theta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi}\int_\beta P(z, Re^{i\theta})\, d\theta.$$

Если $|z - \zeta_0| =: \delta \leqslant \delta_0/2$, то для $\theta \in \beta$ имеем

$$|Re^{i\theta} - z| \geqslant |Re^{i\theta} - \zeta_0| - |z - \zeta_0| \geqslant \delta_0/2,$$
$$P(z, Re^{i\theta}) = \frac{(R+|z|)(R-|z|)}{|Re^{i\theta} - z|^2} \leqslant \frac{2R\delta}{(\delta_0/2)^2} = \frac{8R}{\delta_0^2}\delta,$$

и, значит,

$$|u(z) - f(\zeta_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{16RM}{\delta_0^2}\delta \leqslant \varepsilon,$$

если только $|z - \zeta_0| = \delta$ достаточно мало, ч. т. д.

**22.4. Следствие.** *Пусть $u$: $E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$ — гармоническая функция. Тогда для всех $r < R$ и $|z| < r$ имеем*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

*В частности, $u$ удовлетворяет «теореме о среднем»:*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Это следует из (22.3) ввиду единственности решения задачи Дирихле.

**22.5. Следствие.** *Пусть $u_n$: $E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность гармонических функций, которая компактно (т. е. равномерно на компактных подмножествах) сходится к функции $u$: $E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$. Тогда $u$ тоже гармоническая.*

*Доказательство.* Для всякого $r < R$ и всех $|z| < r$, согласно (22.4), имеем

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\, u_n(re^{i\theta})\, d\theta,$$

где $P(z, \zeta)$ определяется, как в (22.3). Так как последовательность функций $u_n$ на $\partial E(r)$ равномерно сходится к $u$, то эта интегральная формула справедлива и для функции $u$. Из предложения 22.3 теперь следует, что функция $u$ гармоническая в $E(r)$.

**22.6. Теорема Харнака.** *Пусть $M \in \mathbb{R}$ и*

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant M$$

*— монотонно возрастающая ограниченная последовательность гармонических функций $u_n$: $E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$. Тогда эта последовательность сходится равномерно на каждом компактном подмножестве в $E(R)$ к гармонической функции $u$: $E(R) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Пусть $K \subset E(R)$ — компакт. Тогда существуют константы $\rho < r < R$, такие, что

$$K \subset \{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant \rho\}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon' := \frac{r-\rho}{r+\rho}\varepsilon$. Так как последовательность $\{u_n(0)\}$ монотонно возрастает и ограничена, то существует $N$, такое, что

$$u_n(0) - u_m(0) \leqslant \varepsilon' \quad \text{для всех} \quad n \geqslant m \geqslant N.$$

Применим теперь интегральную формулу Пуассона к положительной гармонической функции $u_n - u_m$. Так как

$$0 \leqslant P(z,\ re^{i\theta}) \leqslant \frac{r+|z|}{r-|z|} \leqslant \frac{r+\rho}{r-\rho}$$

при $|z| \leqslant \rho$, то для всех $z \in K$ имеем

$$u_n(z) - u_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\ re^{i\theta})\,(u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta}))\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r+\rho}{r-\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_n(re^{i\theta}) - u_m(re^{i\theta}))\,d\theta =$$

$$= \frac{r+\rho}{r-\rho}(u_n(0) - u_m(0)) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ сходится на $K$ равномерно. Согласно (22.5), предельная функция тоже гармоническая.

**22.7.** Теперь возвратимся к задаче Дирихле на произвольной римановой поверхности $X$. Так как свойство функции быть гармонической инвариантно относительно биголоморфных отображений, то задача Дирихле разрешима также для всех областей $D \subset X$, которые относительно компактно принадлежат некоторой карте $(U,\ z)$ и для которых $z(D) \subset \mathbb{C}$ есть круг.

Введем теперь некоторые необходимые для дальнейшего обозначения. Для открытого множества $Y \subset X$ обозначим через $\operatorname{Reg}(Y)$ множество всех областей $D \Subset Y$, таких, что задача Дирихле в $D$ разрешима для произвольных непрерывных граничных значений $f\colon \partial D \to \mathbb{R}$. Для непрерывной функции $u\colon Y \to \mathbb{R}$ и $D \in \operatorname{Reg}(Y)$ обозначим через $P_D u$ такую непрерывную функцию на $Y$, которая в $Y \setminus D$ совпадает с $u$, а в $\bar{D}$ совпадает с решением задачи Дирихле с граничными значениями $u \mid \partial D$.

Через $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ мы обозначаем векторное пространство всех вещественнозначных непрерывных функций на $Y$.

Очевидно, для всех $u,\ v \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

(i) $P_D(u+v) = P_D u + P_D v$,

(ii) $P_D(\lambda u) = \lambda P_D u$,

(iii) $u \leqslant v \Rightarrow P_D u \leqslant P_D v$.

Функция $u \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ гармоническая тогда и только тогда, когда $P_D u = u$ для всех $D \in \operatorname{Reg}(Y)$.

**22.8. Определение.** Непрерывная функция $u\colon Y \to \mathbb{R}$ называется *субгармонической*, если

$$P_D u \geqslant u \quad \text{для всех} \quad D \in \operatorname{Reg}(Y).$$

Непосредственно из определения следует, что если $u$, $v$: $Y \to \mathbb{R}$ — субгармонические функции и вещественное число $\lambda \geqslant 0$, то функции $u+v$, $\lambda u$, $\sup(u, v)$ тоже субгармонические в $Y$.

Функция $u$: $Y \to \mathbb{R}$ называется *локально субгармонической*, если $u$ субгармоническая в окрестности каждой точки в $Y$.

**22.9. Предложение** (принцип максимума для локально субгармонических функций). *Пусть $Y$ — область на римановой поверхности $X$ и $u$: $Y \to \mathbb{R}$ — локально субгармоническая функция, принимающая свой максимум в некоторой точке $x_0 \in Y$. Тогда функция $u$ постоянна.*

*Доказательство.* Пусть $u(x_0) =: c$ и

$$S := \{x \in Y: \ u(x) = c\}.$$

Если $S \neq Y$, то существует точка $a \in \partial S \cap Y$. Так как $u$ непрерывна, то тогда $u(a) = c$. В каждой окрестности $a$ найдется точка $x$ с $u(x) < c$. Поэтому существует открытая окрестность $D \in \operatorname{Reg}(Y)$ точки $a$, такая, что $u \mid \partial D$ не есть константа, равная $c$. Кроме того, можно считать, что $u$ субгармоническая в окрестности $\overline{D}$ и, значит,

$$u \leqslant P_D u =: v.$$

Функция $v$ гармоническая в $D$. Так как

$$v \mid \partial D = u \mid \partial D \leqslant c,$$

то из принципа максимума для гармонических функций следует, что $v \leqslant c$ в $\overline{D}$. Так как $u(a) = c \leqslant v(a)$, то $v$ принимает в $a$ свой максимум и, значит, $v$ в $\overline{D}$ есть константа, равная $c$. Но это противоречит выбору $D$ и, значит, на самом деле $S = Y$.

**22.10. Следствие.** *Если $u$: $Y \to \mathbb{R}$ локально субгармоническая, то $u$ субгармоническая.*

*Доказательство.* Пусть $D \in \operatorname{Reg}(Y)$ произвольна. Так как $P_D u$ гармоническая в $D$, то

$$v := u - P_D u$$

локально субгармоническая в $D$. Так как $v \mid \partial D = 0$, то, по принципу максимума, $v \leqslant 0$ в $D$, т. е. $u \leqslant P_D u$, ч. т. д.

**22.11. Лемма.** *Если $u$: $Y \to \mathbb{R}$ субгармоническая и $B \in \operatorname{Reg}(Y)$, то $P_B u$ тоже субгармоническая.*

*Доказательство.* Положим $v := P_B u$. Пусть $D \in \operatorname{Reg}(Y)$ — произвольная область. Надо показать, что $P_D v \geqslant v$. В $Y \setminus D$ имеем $P_D v = v$, а в $Y \setminus B$ из-за $v \geqslant u$ имеем

$$P_D v \geqslant P_D u \geqslant u = v.$$

Таким образом, $v - P_D v \leqslant 0$ в $Y \setminus (B \cap D)$. Так как $v - P_D v$ гармоническая в $B \cap D$, то отсюда следует, что

$$v - P_D v \leqslant 0 \quad \text{в} \quad B \cap D.$$

Поэтому $P_D v \geqslant v$ на всей $Y$, ч. т. д.

**22.12. Лемма** (Перрон). *Пусть* $\mathfrak{M} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(Y)$ *есть непустое множество субгармонических в* $Y$ *функций со следующими свойствами:*

(i) $u, v \in \mathfrak{M} \Rightarrow \sup(u, v) \in \mathfrak{M}$,

(ii) $u \in \mathfrak{M}$, $D \in \operatorname{Reg}(Y) \Rightarrow P_D u \in \mathfrak{M}$,

(iii) *существует константа* $K \in \mathbb{R}$, *такая, что*

$$u \leqslant K \quad \text{для всех} \quad u \in \mathfrak{M}.$$

*Тогда функция* $u^*: Y \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$u^*(x) := \sup\{u(x): u \in \mathfrak{M}\},$$

*гармоническая в* $Y$.

*Доказательство.* Пусть $a \in Y$ и $D \in \operatorname{Reg}(Y)$ — окрестность $a$. Выберем последовательность $u_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$, такую, что

$$\lim u_n(a) = u^*(a).$$

Согласно (i), мы можем считать, что

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots .$$

Пусть $v_n := P_D u_n$. Тогда также

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \ldots .$$

По теореме Харнака, последовательность $\{v_n\}$ компактно сходится в $D$ к гармонической функции $v: D \longrightarrow \mathbb{R}$. Имеем

$$v(a) = u^*(a) \quad \text{и} \quad v \leqslant u^* \quad \text{в} \quad D.$$

Теперь покажем, что $v(x) = u^*(x)$ для всех $x \in D$. Для этого пусть $w_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathbb{N}$,— некоторая последовательность, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} w_n(x) = u^*(x).$$

Согласно (i) и (ii), можно считать, что

$$v_n \leqslant w_n = P_D w_n \quad \text{и} \quad w_n \leqslant w_{n+1}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность $\{w_n\}$ компактно сходится в $D$ к гармонической функции $w: D \longrightarrow \mathbb{R}$, такой, что

$$v \leqslant w \leqslant u^*.$$

Так как $v(a)=w(a)=u^*(a)$, то из принципа максимума для гармонической в $D$ функции $v-w$ следует, что $v(y)=w(y)$ для всех $y\in D$, в частности,

$$v(x)=w(x)=u^*(x).$$

Таким образом, функция $u^*=w$ гармоническая в $D$, ч. т. д.

**22.13.** Чтобы решить задачу Дирихле, мы, следуя Перрону, поступим теперь таким образом. Пусть

$$f\colon \partial Y\to\mathbb{R}$$

есть непрерывная ограниченная функция (мы не предполагаем, что $\overline{Y}$ — компакт), и пусть

$$K:=\sup\{f(x)\colon x\in\partial Y\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{P}_f$ множество всех функций $u\in\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$, таких, что

(i) $u\,|\,Y$ субгармоническая,

(ii) $u\,|\,\partial Y\leqslant f$, $u\leqslant K$.

По лемме 22.12, функция

$$u^*:=\sup\{u\colon u\in\mathfrak{P}_f\}$$

гармоническая в $Y$. Чтобы таким образом получилось решение задачи Дирихле, надо, чтобы для каждой точки $x\in\partial Y$ выполнялось условие

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y\in Y}} u^*(y)=f(x).$$

Оно выполняется при определенных ограничениях, но все же не всегда.

**22.14. Определение.** Точка $x\in\partial Y$ называется *регулярной*, если существуют открытая окрестность $U\ni x$ и функция $\beta\in\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y}\cap U)$ со следующими свойствами:

(i) $\beta\,|\,Y\cap U$ субгармоническая,

(ii) $\beta(x)=0$ и $\beta(y)<0$ для всех $y\in\overline{Y}\cap U\setminus\{x\}$.

Функция $\beta$ называется *барьером* в точке $x$.

*Замечание.* Пусть $x\in\partial Y$ — регулярная граничная точка для $Y$. Если $Y_1$ — открытое подмножество в $Y$ с $x\in\partial Y_1$, то $x$ также является регулярной граничной точкой для $Y_1$. Это следует непосредственно из определения. Отсюда получается, что если $Y$ имеет регулярную границу (т. е. все граничные точки регулярны), то каждая связная компонента $Y$ тоже имеет регулярную границу.

**22.15. Лемма.** *Пусть $x \in \partial Y$ — регулярная граничная точка, $V$ — окрестность $x$ и $m \leqslant c$ — вещественные константы. Тогда существует функция $v \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$ со следующими свойствами:*

(i) $v \mid Y$ *субгармоническая,*

(ii) $v(x) = c$, $v \mid \overline{Y} \cap V \leqslant c$,

(iii) $v \mid \overline{Y} \setminus V = m$.

*Доказательство.* Без ограничения общности можно считать, что $c = 0$. Пусть $U$ — открытая окрестность $x$ и $\beta \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y} \cap U)$ — барьер в $x$. Можно считать (уменьшая, если понадобится, $V$), что $V \Subset U$. Так как

$$\sup \{\beta(y): y \in \partial V \cap \overline{Y}\} < 0,$$

то существует константа $k > 0$, такая, что

$$k\beta \mid \partial V \cap \overline{Y} < m.$$

Положим

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta) & \text{на } \overline{Y} \cap V, \\ m & \text{на } \overline{Y} \setminus V. \end{cases}$$

Функция $v$ непрерывна в $\overline{Y}$, локально субгармонична, а значит, и субгармонична в $Y$ и, кроме того, удовлетворяет условиям (ii) и (iii).

**22.16. Лемма.** *Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности, $f: \partial Y \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция и*

$$u^* = \sup \{u: u \in \mathfrak{P}_f\},$$

*где $\mathfrak{P}_f$ — класс функций, определенный в* (22.13). *Тогда для каждой регулярной точки $x \in \partial Y$ имеем*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

*Доказательство.* Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует относительно компактная открытая окрестность $V \ni x$, такая, что

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad y \in \partial Y \cap V.$$

Пусть $k < K$ — вещественные константы, такие, что

$$k \leqslant f(y) \leqslant K \quad \text{для всех} \quad y \in \partial Y.$$

(a) Выберем, согласно лемме 22.15, субгармоническую в $Y$ функцию $v \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$, такую, что

$$v(x) = f(x) - \varepsilon, \quad v \mid \overline{Y} \cap V \leqslant f(x) - \varepsilon, \quad v \mid \overline{Y} \setminus V = k - \varepsilon.$$

Тогда $v|\partial Y \leqslant f$ и, значит, $v \in \mathfrak{P}_f$, откуда следует, что $v \leqslant u^*$. Поэтому

$$\varliminf_{y \to x} u^*(y) \geqslant v(x) = f(x) - \varepsilon.$$

(b) Опять по лемме 22.15, существует субгармоническая в $Y$ функция $w \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(\overline{Y})$, такая, что

$$w(x) = -f(x), \quad w|\overline{Y} \cap V \leqslant -f(x), \quad w|Y \setminus V = -K.$$

Для каждой $u \in \mathfrak{P}_f$ и $y \in \partial Y \cap V$ имеем $u(y) \leqslant f(x) + \varepsilon$ и, значит,

$$u(y) + w(y) \leqslant \varepsilon \quad \text{для } y \in \partial Y \cap V.$$

Кроме того,

$$u(z) + w(z) \leqslant K - K = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \overline{Y} \cap \partial V.$$

По принципу максимума для субгармонической в $Y \cap V$ функции $u + w$ имеем

$$u + w \leqslant \varepsilon \quad \text{в} \quad \overline{Y} \cap V$$

и, значит,

$$u|\overline{Y} \cap V \leqslant \varepsilon - w|\overline{Y} \cap V \quad \text{для всех} \quad u \in \mathfrak{P}_f$$

Отсюда следует, что

$$\varlimsup_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) \leqslant \varepsilon - w(x) = f(x) + \varepsilon.$$

Из (a) и (b) вытекает утверждение леммы.

**22.17. Предложение.** *Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$. Пусть все граничные точки $Y$ регулярны. Тогда задача Дирихле в $Y$ разрешима для всякой непрерывной ограниченной граничной функции $f$: $\partial Y \to \mathbb{R}$.*

Это следует непосредственно из леммы 22.16.

Наконец, укажем один простейший геометрический признак регулярности граничной точки. Так как регулярность является локальным свойством, которое инвариантно относительно биголоморфных отображений, то достаточно сформулировать этот признак для случая $Y \subset \mathbb{C}$.

**22.18. Предложение.** *Пусть $Y$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, $a \in \partial Y$ и существует круг*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| < r\} \qquad (m \in \mathbb{C},\ r > 0),$$

*такой, что $a \in \partial D$ и $\overline{D} \cap Y = \varnothing$. Тогда $a$ — регулярная точка для $Y$.*

*Доказательство*. Положим $c := \frac{a+m}{2}$, см. рис. 6. Тогда

$$\beta(z) := \log\frac{r}{2} - \log|z-c|$$

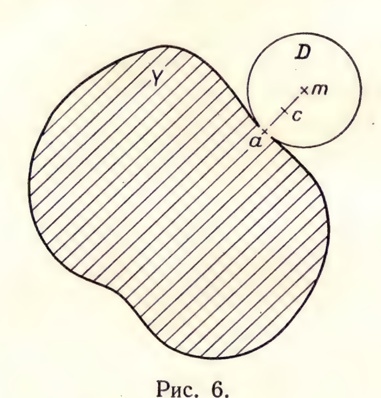



Рис. 6.

определяет барьер в точке $a$ и, таким образом, $a$ — регулярная граничная точка.

## § 23. Счетность топологии

В этом параграфе мы доказываем теорему Радо о том, что всякая риманова поверхность обладает счетной топологией. (Для компактных римановых поверхностей это, конечно, тривиально.) Кроме того, для дальнейших применений мы строим специальные исчерпания некомпактных римановых поверхностей.

**23.1. Лемма.** *Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства и $f\colon X \to Y$ — непрерывное, открытое и сюръективное отображение. Если $X$ имеет счетную топологию, то $Y$ — тоже.*

*Доказательство*. Пусть $\mathfrak{U}$ — счетный базис топологии в $X$ и

$$\mathfrak{B} = \{f(U)\colon\ U \in \mathfrak{U}\}.$$

Тогда $\mathfrak{B}$ есть счетная система открытых подмножеств в $Y$. Мы докажем, что $\mathfrak{B}$ является базисом топологии в $Y$.

Пусть $D$ — открытое подмножество в $Y$ и $y \in D$. Надо показать, что имеется $V \in \mathfrak{B}$, такое, что $y \in V \subset D$. Так как $f$ сюръективно, то существует $x \in X$ с $f(x) = y$. Множество $f^{-1}(D)$ является открытой окрестностью $x$. Поэтому существует $U \in \mathfrak{U}$ с $x \in U \subset f^{-1}(D)$. Тогда для $V := f(U)$ имеем $y \in V \subset D$, ч. т. д.

**23.2 Лемма** (Пуанкаре — Вольтерра). *Пусть $X$ — связное многообразие, $Y$ — хаусдорфово пространство со счетной топологией и $f\colon X \to Y$ — непрерывное дискретное отображение. Тогда $X$ тоже имеет счетную топологию.*

*Доказательство.* Пусть $\mathfrak{U}$ — счетный базис топологии в $Y$. Обозначим через $\mathfrak{V}$ семейство всех открытых подмножеств $V$ в $X$ со следующими свойствами:

(i) $V$ имеет счетную топологию,

(ii) $V$ есть связная компонента некоторого множества вида $f^{-1}(U)$ с $U \in \mathfrak{U}$.

(a) Утверждение: $\mathfrak{V}$ есть базис топологии в $X$.

В самом деле, пусть $D$ — открытое подмножество в $X$ и $x \in D$. Надо показать, что имеется $V \in \mathfrak{V}$ с $x \in V \subset D$. Так как $f$ дискретно, то существует относительно компактная открытая окрестность $W \subset D$ точки $x$, такая, что $\partial W$ не пересекает слой $f^{-1}(f(x))$. Множество $f(\partial W)$ компактно, значит, замкнуто и не содержит точку $f(x)$. Поэтому имеется $U \in \mathfrak{U}$ с $f(x) \in U$ и $U \cap f(\partial W) = \varnothing$. Пусть $V$ — та связная компонента $f^{-1}(U)$, которая содержит точку $x$. Так как $V \cap \partial W = \varnothing$, то $V \subset W$ и поэтому $V$ имеет счетную топологию, т. е. $V \in \mathfrak{V}$. Утверждение (a) доказано.

(b) Далее, убедимся, что для каждого $V_0 \in \mathfrak{V}$ существует не более чем счетное число $V \in \mathfrak{V}$ с $V_0 \cap V \neq \varnothing$. Для каждого $U \in \mathfrak{U}$ связные компоненты $f^{-1}(U)$ попарно не пересекаются, и так как $V_0$ имеет счетную топологию, то может быть лишь не более чем счетное множество этих связных компонент. Так как $\mathfrak{U}$ тоже счетно, то отсюда следует наше утверждение.

(c) Докажем теперь, что семейство $\mathfrak{V}$ счетно.

Фиксируем $V^* \in \mathfrak{V}$ и для $n \in \mathbb{N}$ определим множество $\mathfrak{V}_n \subset \mathfrak{V}$ следующим образом: $\mathfrak{V}_n$ состоит из всех $V \in \mathfrak{V}$, для которых существуют элементы $V_0, V_1, \ldots, V_n \in \mathfrak{V}$, такие, что

$$V_0 = V^*, \quad V_n = V \quad \text{и} \quad V_{k-1} \cap V_k \neq \varnothing, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Так как $X$ связно, то $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}_n = \mathfrak{V}$. Таким образом, достаточно показать, что каждое $\mathfrak{V}_n$ счетно. Это доказывается по индукции. Семейство $\mathfrak{V}_0 = \{V^*\}$ тривиальным образом счетно. Пусть уже известно, что $\mathfrak{V}_n$ счетно. Тогда непосредственно из (b) следует, что $\mathfrak{V}_{n+1}$ тоже счетно.

Этим доказано, что $X$ имеет счетную топологию.

**23.3. Предложение** (Радо). *Всякая риманова поверхность имеет счетную топологию.*

*Доказательство*. Пусть $U$ — координатная окрестность на $X$. Выберем два компактных непересекающихся круга $K_0, K_1 \subset U$ и положим $Y := X \diagdown (K_0 \cup K_1)$. Так как граница $\partial Y = \partial K_0 \cup \partial K_1$ удовлетворяет условию регулярности из предложения 22.18, то существует непрерывная функция $u$: $\overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, которая в $Y$ гармонична и удовлетворяет граничным условиям

$$u \mid \partial K_0 = 0, \qquad u \mid \partial K_1 = 1.$$

Поэтому $\omega := \partial u$ в $Y$ является отличной от тождественного нуля голоморфной дифференциальной формой. На универсальном накрытии $p$: $\tilde{Y} \longrightarrow Y$ форма $p^*\omega$ обладает голоморфной первообразной функцией $f$. Так как $f$ не постоянна, то отображение $f$: $\tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям леммы 23.2 и, значит, $\tilde{Y}$ имеет счетную топологию. Но тогда, по лемме 23.1, $Y$ имеет счетную топологию. Так как $X = Y \cup U$, то $X$ тоже имеет счетную топологию, ч. т. д.

Имея в виду дальнейшие применения к доказательству аппроксимационной теоремы Рунге, мы докажем еще существование специальных исчерпаний римановых поверхностей. Для этого определим сначала известный оператор оболочки.

**23.4. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность. Для подмножества $Y \subset X$ обозначим через $\boldsymbol{h}(Y)$ объединение $Y$ со всеми относительно компактными связными компонентами множества $X \diagdown Y$. Открытое подмножество $Y \subset X$ называется *множеством Рунге*, когда $Y = \boldsymbol{h}(Y)$, т. е. когда $X \diagdown Y$ не имеет компактных связных компонент.

Легко проверяются следующие свойства:

(i) $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{h}(Y)) = \boldsymbol{h}(Y)$ для всех $Y \subset X$,

(ii) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow \boldsymbol{h}(Y_1) \subset \boldsymbol{h}(Y_2)$.

*Замечание*. Если надо указать зависимость от $X$, мы пишем точнее: $\boldsymbol{h}_X(Y)$ вместо $\boldsymbol{h}(Y)$. В связи с этим приведем следующий пример. Пусть

$$Y := \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < 2\}.$$

Рассмотрим сначала $Y$ как подмножество $\mathbb{C}$, а затем как подмножество $\mathbb{C}^*$. Тогда

$$\boldsymbol{h}_{\mathbb{C}}(Y) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 2\},$$
$$\boldsymbol{h}_{\mathbb{C}^*}(Y) = Y.$$

**23.5. Предложение.** *Пусть $Y$ — подмножество римановой поверхности $X$. Тогда*

(i) *$Y$ замкнуто $\Rightarrow \boldsymbol{h}(Y)$ замкнуто,*

(ii) *$Y$ компактно $\Rightarrow \boldsymbol{h}(Y)$ компактно.*

*Доказательство.* (i) Пусть $C_j$, $j \in J$, суть связные компоненты $X \setminus Y$. Так как $X \setminus Y$ открыто и $X$ — многообразие, то все $C_j$ открыты. Пусть $C_j$, $j \in J_0$, — те из компонент $C_j$, которые относительно компактны. Тогда

$$X \setminus \boldsymbol{h}(Y) = \bigcup \{C_j: \ j \in J \setminus J_0\}$$

и это множество открыто. Поэтому $\boldsymbol{h}(Y)$ замкнуто.

(ii) Можно считать, что $Y \neq \varnothing$. Пусть $U$ — открытая относительно компактная окрестность $Y$ и $C_j$ — те же, что и выше.

*Утверждение* (*a*). Всякая $C_j$ пересекает $\overline{U}$.

Если это не так, то $C_j$ принадлежит $X \setminus \overline{U}$ и, значит,

$$\overline{C_j} \subset X \setminus U \subset X \setminus Y.$$

Так как $C_j$ — связная компонента $X \setminus Y$, то отсюда следует, что $C_j = \overline{C}_j$ и, значит, $C_j$ — одновременно открытое и замкнутое подмножество $X$, что противоречит связности $X$.

*Утверждение* (*b*). Только конечное число $C_j$ пересекает $\partial U$. Это следует из того, что $\partial U$ — компакт, а $C_j$ — попарно не пересекающиеся открытые множества, объединение которых покрывает $\partial U$.

Теперь утверждение (ii) доказывается уже просто. Пусть $C_j$, $j \in J_0$, — относительно компактные связные компоненты $X \setminus Y$ и $C_{j_1}, \ldots, C_{j_m}$ — те из них, которые пересекают $\partial U$.

Прочие $C_j$, согласно (a), целиком содержатся в $U$. Таким образом,

$$\boldsymbol{h}(Y) \subset U \cup C_{j_1} \cup \ldots \cup C_{j_m},$$

т. е. $\boldsymbol{h}(Y)$ — относительно компактное, а ввиду (i) и компактное подмножество $X$.

**23.6. Следствие.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность. Тогда существует последовательность $K_j$, $j \in \mathbb{N}$, компактных подмножеств в $X$ со следующими свойствами:*

(i) $K_j = \boldsymbol{h}(K_j)$ *для всех* $j$,

(ii) $K_{j-1} \subset \mathring{K}$ *для всех* $j \geqslant 1$,

(iii) $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} K_j = X$.

*Доказательство.* Так как $X$ имеет счетную топологию, то существует последовательность компактных подмножеств $K'_0 \subset K'_1 \subset K'_2 \subset \ldots$ в $X$ с $\bigcup K'_j = X$. Мы построим последовательность $K_j$ по индукции.

*Начало индукции.* Положим $K_0 := \boldsymbol{h}(K'_0)$.

*Шаг индукции.* Пусть $K_1, \ldots, K_m$ со свойствами (i) и (ii) уже построены. Тогда в $X$ найдется компактное множество $M$ с $K'_m \cup K_m \subset \mathring{M}$. Положим $K_{m+1} := \boldsymbol{h}(M)$.

Тогда для построенной таким образом последовательности $K_j$, $j \in \mathbb{N}$, выполняются условия (i), (ii) и (iii).

**23.7. Лемма.** *Пусть $K_1$ и $K_2$—компактные подмножества римановой поверхности $X$, такие, что $K_1 \subset \mathring{K}_2$ и $\boldsymbol{h}(K_2) = K_2$. Тогда существует открытое множество Рунге $Y$ в $X$, такое, что $K_1 \subset Y \subset K_2$. Кроме того, $Y$ можно выбрать так, что его граница регулярна относительно задачи Дирихле.*

*Доказательство.* У каждой граничной точки $x \in \partial K_2$ найдется координатная окрестность $U$, которая не пересекает $K_1$. В $U$ выберем компактный круг $D$, содержащий $x$ внутри себя. Конечное число таких кругов, скажем $D_1, \ldots, D_k$, покрывают $\partial K_2$. Мы полагаем

$$Y := K_2 \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_k).$$

Тогда $Y$ открыто и $K_1 \subset Y \subset K_2$. Пусть $C_j$, $j \in J$, суть связные компоненты $X \setminus K_2$. По условию, ни одна из них не является относительно компактной. Каждое $D_i$ связно и пересекает по крайней мере одну $C_j$. Поэтому каждая связная компонента $X \setminus Y$ тоже не является относительно компактной и, значит, $Y = \boldsymbol{h}(Y)$. По предложению 22.18, все граничные точки множества $Y$ регулярны.

**23.8. Предложение.** *Пусть $Y$—открытое множество Рунге на римановой поверхности $X$. Тогда всякая связная компонента $Y$ тоже является множеством Рунге.*

*Доказательство.* (a) Пусть $Y_i$, $i \in I$,—связные компоненты множества $Y$. Так как $Y$ открыто, а $X$—многообразие, то все $Y_i$ открыты. Пусть $A := X \setminus Y$ есть дополнение к $Y$. Связные компоненты $A_k$, $k \in K$, множества $A$, по условию, замкнуты, но не компактны.

(b) Утверждение. Для каждого $i \in I$ имеем $\overline{Y}_i \cap A \neq \varnothing$.

В противном случае $\overline{Y}_i \subset Y$. Так как

$$\overline{Y}_i \cap \bigcup_{j \neq i} Y_j = \varnothing,$$

то из этого следовало бы равенство $\overline{Y}_i = Y_i$, которое противоречит связности $X$.

(c) Утверждение. Для всякой связной компоненты $C$ в $X \setminus Y_i$ множество $C \cap A$ непусто.

В противном случае нашлось бы $j \neq i$, такое, что $C \cap Y_j \neq \varnothing$. Так как $C$ замкнуто, а $Y_j$ связно, то из этого следовало бы, что $\overline{Y}_j \subset C$, а тогда из (b) получается, что $C \cap A \neq \varnothing$.

(d) Пусть $C$ — связная компонента в $X \setminus Y_i$. Согласно (c), $C$ пересекает по крайней мере одно $A_k$ и, значит, $C \supset A_k$. Так как $A_k$ не компактно, то $C$ тоже не компактно. Отсюда следует, что $Y_i$ — множество Рунге.

**23.9. Предложение.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность. Тогда существует последовательность $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \ldots$ относительно компактных областей Рунге, такая, что $\bigcup Y_\nu = X$, причем каждая $Y_\nu$ имеет регулярную границу относительно задачи Дирихле.*

*Доказательство.* Достаточно показать, что для каждого компакта $K \subset X$ существует область Рунге $Y \Subset X$ с регулярной границей, такая, что $K \subset Y$.

Для $K$ мы можем найти связное компактное множество $K_1 \supset K$, а также компактное множество $K_2$ с $K_1 \subset \mathring{K}_2$. По лемме 23.7, существует открытое множество Рунге $Y_1$ с $K_1 \subset Y_1 \subset \subset h(K_2)$ и с регулярной границей. Пусть $Y$ есть связная компонента $Y_1$, в которой лежит $K_1$. Согласно (23.8), $Y$ тоже является множеством Рунге, а в силу замечания 22.14, оно имеет регулярную границу, ч. т. д.

## § 24. Лемма Вейля

В этом параграфе мы вводим понятие распределения. Распределения — это обобщенные функции. В классе распределений можно неограниченно дифференцировать. Поэтому можно рассматривать решения дифференциальных уравнений в смысле распределений. Лемма Вейля утверждает, что для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ оба понятия решения совпадают, т. е. всякое гармоническое распределение является бесконечно дифференцируемой функцией в классическом смысле, и эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа.

**24.1.** Пусть $X$ — открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим, как и выше, через $\mathscr{E}(X)$ векторное пространство бесконечно дифференцируемых (относительно вещественных координат) функций $f: X \to \mathbb{C}$. Носителем $\operatorname{Supp}(f)$ такой функции (относительно $X$) называется замыкание (в $X$) множества $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$. Мы полагаем

$$\mathscr{D}(X) := \{f \in \mathscr{E}(X): \operatorname{Supp}(f) \text{ есть компакт в } X\}.$$

В векторном пространстве $\mathscr{D}(X)$ введем следующее понятие сходимости: мы говорим, что последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ функций из $\mathscr{D}(X)$ сходится к $f \in \mathscr{D}(X)$, и обозначаем это как $f_\nu \xrightarrow[\mathscr{D}]{} f$, если

(i) существует компактное подмножество $K \subset X$, такое, что $\mathrm{Supp}(f_\nu) \subset K$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{Supp}(f) \subset K$,

(ii) для каждого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ последовательность $D^\alpha f_\nu$ сходится равномерно на $K$ к $D^\alpha f$.

Здесь $D^\alpha$ — дифференциальный оператор $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}}$.

Таким образом, сходимость в $\mathscr{D}(X)$ — это намного более сильное условие, чем поточечная или равномерная сходимость последовательностей функций.

**24.2. Определение.** Пусть $X$ открыто в $\mathbb{C}$. *Распределение* на $X$ — это непрерывное линейное отображение

$$T\colon\ \mathscr{D}(X) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto T[f].$$

Непрерывность $T$ здесь означает, что из $f_\nu \underset{\mathscr{D}}{\to} f$ следует сходимость $T[f_\nu] \to T[f]$ (как числовой последовательности в $\mathbb{C}$).

Множество всех распределений на $X$ образует векторное пространство, которое обозначается через $\mathscr{D}'(X)$.

**24.3. Примеры.** (a) Всякой непрерывной функции $h \in \mathscr{C}(X)$ можно сопоставить следующее распределение $T_h \in \mathscr{D}'(X)$. Для $f \in \mathscr{D}(X)$ пусть

$$T_h[f] := \iint\limits_X h(z)\, f(z)\, dx\, dy \qquad (z = x + iy).$$

Ясно, что отображение $f \mapsto T_h[f]$ линейно и непрерывно. Если $h_1, h_2 \in \mathscr{C}(X)$ и $T_{h_1}[f] = T_{h_2}[f]$ для всех $f \in \mathscr{D}(X)$, то $h_1 = h_2$. Поэтому (линейное) отображение

$$\mathscr{C}(X) \to \mathscr{D}'(X), \quad h \mapsto T_h,$$

инъективно. Таким образом, непрерывные функции на $X$ можно отождествлять с соответствующими им распределениями.

(b) Пусть $a \in X$. Для $f \in \mathscr{D}(X)$ положим

$$\delta_a[f] := f(a).$$

Тем самым определено распределение $\delta_a \in \mathscr{D}'(X)$, *дельта-функция Дирака* в точке $a$. Это распределение нельзя представить функцией, как в примере (a).

**24.4. Дифференцирование распределений.** Пусть $h \in \mathscr{E}(X)$ и $f \in \mathscr{D}(X)$. Тогда для каждого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$

$$\iint\limits_X h(z)\, D^\alpha f(z)\, dx\, dy = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \iint\limits_X f(z)\, D^\alpha h(z)\, dx\, dy.$$

Это доказывается $(\alpha_1 + \alpha_2)$-кратным интегрированием по частям. Так как $f$ имеет компактный носитель, то все граничные члены при этом пропадают.

Таким образом, в обозначениях примера (24.3a) имеем

$$T_{D^{\alpha}h}[f]=(-1)^{|\alpha|}T_h[D^{\alpha}f], \quad |\alpha|:=\alpha_1+\alpha_2.$$

На этой основе вводится следующее определение: для $T\in\mathscr{D}'(X)$ полагают

$$(D^{\alpha}T)[f]:=(-1)^{|\alpha|}T[D^{\alpha}f] \quad \text{для всех } f\in\mathscr{D}(X).$$

Так как из $f_\nu \xrightarrow[\mathscr{D}]{} f$ следует $D^{\alpha}f_\nu \xrightarrow[\mathscr{D}]{} D^{\alpha}f$, то отображение $D^{\alpha}T$: $\mathscr{D}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$ непрерывно, т. е. $D^{\alpha}T\in\mathscr{D}'(X)$. Из сказанного выше вытекает, что для дифференцируемых функций производные в обычном смысле и в смысле распределений — одно и то же.

**24.5. Лемма.** *Пусть задано открытое подмножество* $X\subset\mathbb{C}$, *компактное подмножество* $K\subset X$ *и открытый интервал* $I\subset\mathbb{R}$. *Пусть* $g$: $X\times I\longrightarrow\mathbb{C}$ — *бесконечно дифференцируемая (в вещественном смысле) функция с* $\operatorname{Supp}(g)\subset K\times I$ *и* $T$ — *распределение на* $X$. *Тогда функция* $t\longmapsto T_z[g(z,t)]$ *на* $I$ *бесконечно дифференцируема и*

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}T_z[g(z,t)]=T_z\left[\frac{\partial g(z,t)}{\partial t}\right].$$

Здесь индекс $z$ означает, что $T$ действует на $g(z,t)$ как на функцию от $z$, а $t$ рассматривается как параметр.

Таким образом, действие распределения на функцию, которая зависит от параметра, перестановочно с дифференцированием по этому параметру.

*Доказательство.* Достаточно доказать соотношение (*). Тогда его повторное применение показывает, что $T_z[g(z,t)]$ можно бесконечно дифференцировать по $t$.

Из линейности $T$ следует, что

$$\frac{d}{dt}T_z[g(z,t)]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_z[g(z,t+h)]-T_z[g(z,t)]=$$
$$=\lim_{h\to 0}T_z\left[\frac{g(z,t+h)-g(z,t)}{h}\right].$$

Для фиксированного $t\in I$ и достаточно малого $h\in\mathbb{R}^*$ пусть

$$f_h(z):=\frac{1}{h}(g(z,t+h)-g(z,t)).$$

Тогда $f_h\in\mathscr{D}(X)$ и

$$f_h \xrightarrow[\mathscr{D}]{} \frac{\partial g(\cdot,t)}{\partial t} \quad \text{при} \quad h\longrightarrow 0.$$

Отсюда, ввиду непрерывности $T$, следует, что

$$\lim_{h\to 0} T[f_h] = T_z\left[\frac{\partial g(z,t)}{\partial t}\right], \quad \text{ч. т. д.}$$

Следующая лемма утверждает, что действие распределения на функцию, которая зависит от параметра, перестановочно и с интегрированием по этому параметру.

**24.6. Лемма.** *Пусть $X$, $Y$ — открытые подмножества в $\mathbb{C}$ и $K\subset X$, $L\subset Y$ — компактные подмножества. Пусть, далее, $g$: $X\times Y\longrightarrow\mathbb{C}$ есть бесконечно дифференцируемая (в вещественном смысле) функция с* $\operatorname{Supp}(g)\subset K\times L$. *Тогда для всякого распределения $T$ на $X$ имеем*

$$T_z\left[\iint_Y g(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta\right] = \iint_Y T_z[g(z,\zeta)]\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta).$$

*Доказательство.* Из (24.5) следует, что $T_z[g(z,\zeta)]$ является вещественно бесконечно дифференцируемой функцией относительно $\zeta=\xi+i\eta$, поэтому интеграл в правой части определен. Пусть $R\subset\mathbb{C}$ есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, который охватывает $L$. Мы полагаем, что функция $g(z,\zeta)$ продолжена нулем на $K\times(R\setminus L)$. Для каждого $n>0$ разобьем $R$ на $n^2$ меньших прямоугольников $R_{n\nu}$, $\nu=1,\ldots,n^2$, разбивая стороны на $n$ равных частей, и выберем в них по точке $\zeta_{n\nu}\in R_{n\nu}$. Пусть $F$ есть площадь прямоугольника $R$. Тогда римановы суммы

$$G_n(z) := \frac{F}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n^2} g(z,\zeta_{n\nu})$$

сходятся при $n\longrightarrow\infty$ к интегралу $\iint_Y g(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta$. Для всякого $n$ имеем $\operatorname{Supp}(G_n)\subset K$, поэтому

$$G_n \underset{\mathscr{D}}{\longrightarrow} \iint_Y g(\cdot,\zeta)\,d\xi\,d\eta \qquad (n\longrightarrow\infty).$$

Из непрерывности $T$ теперь следует, что

$$T_z\left[\iint_Y g(z,\zeta)\,d\xi\,d\eta\right] = \lim_{n\to\infty} T[G_n] = \iint_Y T_z[g(z,\zeta)]\,d\xi\,d\eta.$$

**24.7. Регуляризация (сглаживание) функций.** Выберем функцию $\rho\in\mathscr{D}(\mathbb{C})$ со следующими свойствами:

(i) $\operatorname{Supp}(\rho)\subset\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$,

(ii) $\rho$ симметрична относительно вращений, т. е. $\rho(z)=\rho(|z|)$ для всех $z\in\mathbb{C}$,

(iii) $\iint\limits_{\mathbb{C}} \rho(x+iy)\,dx\,dy = 1.$

Для $\varepsilon > 0$ и $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\rho_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $\operatorname{Supp}(\rho_\varepsilon) \subset \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \varepsilon\}$ и

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon(x+iy)\,dx\,dy = 1.$$

Пусть $B(z, \varepsilon)$ обозначает открытый круг с центром $z$ и радиусом $\varepsilon$, и пусть $\overline{B}(z, \varepsilon)$ — его замыкание.

Если $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, то

$$U^{(\varepsilon)} := \{z \in U\colon \overline{B}(z, \varepsilon) \subset U\}$$

также открыто.

Для непрерывной функции $f\colon U \to \mathbb{C}$ мы определим новую функцию $\mathrm{sm}_\varepsilon f\colon U^{(\varepsilon)} \to \mathbb{C}$, полагая

$$(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(z) := \iint\limits_{U} \rho_\varepsilon(z-\zeta)\, f(\zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Очевидно, что $\mathrm{sm}_\varepsilon f \in \mathscr{E}(U^{(\varepsilon)})$, так как можно дифференцировать под знаком интеграла. Функция $\mathrm{sm}_\varepsilon f$ называется *регуляризацией* $f$.

*Замечание.* Это определение, естественно, зависит от выбора функции $\rho$. Обозначение sm взято от английского «smoothing».

**24.8. Лемма.** *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ открыто, $f \in \mathscr{E}(U)$ и $\varepsilon > 0$.*

(a) *Для всех $\alpha \in \mathbb{N}^2$ имеем*

$$D^\alpha(\mathrm{sm}_\varepsilon f) = \mathrm{sm}_\varepsilon(D^\alpha f).$$

(b) *Если $z \in U^{(\varepsilon)}$ и $f$ гармоническая в $B(z, \varepsilon)$, то*

$$(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(z) = f(z).$$

*Доказательство.* (a) Для $z \in U^{(\varepsilon)}$ заменой переменной интегрирования получаем

$$(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(\zeta)\, f(z+\zeta)\, d\xi\, d\eta$$

и, значит,

$$D^\alpha(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(z) = \iint\limits_{|\zeta|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(\zeta)\, D^\alpha f(z+\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint\limits_{U} \rho_\varepsilon(z-\zeta)\, D^\alpha f(\zeta)\, d\xi\, d\eta = \mathrm{sm}_\varepsilon(D^\alpha f)(z).$$

(b) Если $f$ в $B(z, \varepsilon)$ гармоническая, то для всех $r \in [0, \varepsilon]$ имеет место теорема о среднем (22.4):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Отсюда получается, что

$$(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(z) = \iint_{|\zeta| < \varepsilon} \rho_\varepsilon(\zeta) f(z+\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \varepsilon \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \rho_\varepsilon(r) f(z + re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta = \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\, r\, dr \cdot 2\pi f(z) = f(z),$$

так как

$$1 = \iint_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon(\xi + i\eta)\, d\xi\, d\eta = 2\pi \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\, r\, dr.$$

**24.9. Предложение** (лемма Вейля). *Пусть $U$ — открытое множество в $\mathbb{C}$ и $T$ — распределение на $U$, такое, что $\Delta T = 0$. Тогда $T$ — бесконечно дифференцируемая функция.*

Или по-другому: Пусть $T$: $\mathscr{D}(U) \to \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал с $T[\Delta\varphi] = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(U)$. Тогда существует функция $h \in \mathscr{E}(U)$ с $\Delta h = 0$ и

$$T[f] = \iint_U h(z) f(z)\, dx\, dy \quad \text{для всех} \quad f \in \mathscr{D}(U).$$

*Доказательство.* Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Для $z \in U^{(\varepsilon)}$ функция $\zeta \mapsto \rho_\varepsilon(z - \zeta)$ имеет компактный носитель в $U$, и поэтому определена

$$h(z) := T_\zeta[\rho_\varepsilon(z - \zeta)].$$

По (24.5), функция $z \mapsto h(z)$ принадлежит $\mathscr{E}(U^{(\varepsilon)})$. Очевидно, достаточно показать, что для каждой функции $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ с $\mathrm{Supp}(f) \subset U^{(\varepsilon)}$

(1) $$T[f] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h(z) f(z)\, dx\, dy.$$

Функция $\mathrm{sm}_\varepsilon f$ имеет компактный носитель в $U$ и, согласно (24.6),

(2) $$T[\mathrm{sm}_\varepsilon f] = T_\zeta\left[\iint_U \rho_\varepsilon(z - \zeta) f(z)\, dx\, dy\right] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h(z) f(z)\, dx\, dy.$$

По (13.3), существует функция $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{C})$ с $\Delta\psi = f$. Функция $\psi$ гармоническая в $V := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(f)$ и, значит, по (24.8b),

$$\psi = \mathrm{sm}_\varepsilon \psi \quad \text{в} \quad V^{(\varepsilon)}.$$

Поэтому $\varphi := \psi - \mathrm{sm}_\varepsilon \psi$ имеет компактный носитель в $U$ и, согласно (24.8a),

$$\Delta\varphi = \Delta(\psi - \mathrm{sm}_\varepsilon \psi) = \Delta\psi - \mathrm{sm}_\varepsilon(\Delta\psi) = f - \mathrm{sm}_\varepsilon f.$$

Так как $\Delta T = 0$, то $T[\Delta\varphi] = 0$ и, значит,

$$T[f] = T[\mathrm{sm}_\varepsilon f + \Delta\varphi] = T[\mathrm{sm}_\varepsilon f].$$

Отсюда и из (2) получается соотношение (1), ч. т. д.

**24.10. Следствие.** *Пусть $T$ — распределение на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ с $\frac{\partial T}{\partial \bar z} = 0$. Тогда $T$ есть голоморфная функция в $U$.*

*Доказательство.* Так как $\frac{\partial T}{\partial \bar z} = 0$, то также

$$\Delta T = 4 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} T\right) = 0$$

и, значит, $T \in \mathscr{E}(U)$, согласно (24.9). Так как $\frac{\partial T}{\partial \bar z} = 0$, то функция $T$ голоморфна.

*Замечание.* Доказанная здесь только на плоскости, лемма Вейля справедлива также (почти дословно с тем же доказательством) для гармонических распределений в $\mathbb{R}^n$. Но лемма Вейля — только частный случай общих теорем регулярности для эллиптических дифференциальных операторов на дифференцируемых многообразиях, см. [34], [43].

## § 25. Аппроксимационная теорема Рунге

Классическая аппроксимационная теорема Рунге утверждает, что в односвязной области $Y \subset \mathbb{C}$ всякую голоморфную функцию можно аппроксимировать равномерно на компактах функциями, голоморфными на всей плоскости $\mathbb{C}$ (а значит, и многочленами). Эта теорема была распространена Бенке — Штейном [51] на произвольные некомпактные римановы поверхности $X$. Если хотят аппроксимировать все голоморфные функции в открытом множестве $Y \subset X$ функциями, голоморфными на $X$, то односвязность заменяется условием, что $X \setminus Y$ не имеет компактных связных компонент. Мы здесь приведем, следуя Мальгранжу [56], функционально-аналитическое доказательство аппроксимационной теоремы Рунге, основанное на лемме Вейля.

**25.1.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $Y \subset X$ — открытое подмножество. Мы хотим ввести на пространстве $\mathscr{E}(Y)$ дифференцируемых функций в $Y$ структуру пространства Фреше. Для этого выберем счетное семейство компактных множеств $K_j \subset Y$, $j \in J$, с $\bigcup \mathring{K}_j = Y$ так, чтобы каждое $K_j$ содержалось в некоторой координатной окрестности $(U_j, z_j)$. Для $j \in J$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2$ определим полунорму $p_{j\nu}$: $\mathscr{E}(Y) \to \mathbb{R}_+$, полагая

$$p_{j\nu}(f) := \sup_{a \in K_j} |D_j^\nu f(a)|.$$

Здесь $D_j^\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\nu_2}$ — дифференциальный оператор относительно координаты $z_j = x_j + iy_j$. Это счетное семейство полунорм $p_{j\nu}$ определяет на $\mathscr{E}(Y)$ топологию, в которой базис окрестностей нуля состоит из конечных пересечений множеств вида

$$\mathcal{U}(p_{j\nu}, \varepsilon) := \{f \in \mathscr{E}(Y): \ p_{j\nu}(f) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Сходимость $f_n \to f$ относительно этой топологии означает равномерную сходимость функций и всех их производных на каждом $K_j$. С этой топологией $\mathscr{E}(Y)$ становится пространством Фреше. Легко убедиться, что эта топология не зависит от выбора $K_j$ и $(U_j, z_j)$. На векторном подпространстве $\mathcal{O}(Y) \subset \mathscr{E}(Y)$ индуцированная топология совпадает с топологией компактной сходимости, так как для голоморфных функций из равномерной сходимости на компактах вытекает такая же сходимость всех производных. Аналогично вводится структура пространства Фреше на векторном пространстве $\mathscr{E}^{0,1}(Y)$ дифференциальных форм типа (0, 1) на $Y$ с дифференцируемыми коэффициентами. Элемент $\omega \in \mathscr{E}^{0,1}(Y)$ над $U_j$ можно записать как $\omega = f_j d\bar{z}_j$ с $f_j \in \mathscr{E}(U_j \cap Y)$; по определению полагают

$$p_{j\nu}(\omega) := \sup_{a \in K_j} |D_j^\nu f_j(a)|.$$

Структура пространства Фреше получается, как и выше, при помощи полунорм $p_{j\nu}$.

**25.2. Лемма.** *Пусть $Y$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$. Тогда всякое непрерывное линейное отображение $T$: $\mathscr{E}(Y) \to \mathbb{C}$ имеет компактный носитель, т. е. существует компактное подмножество $K \subset Y$, такое, что*

$$T[f] = 0 \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathscr{E}(Y) \quad \textit{с} \quad \operatorname{Supp}(f) \subset Y \setminus K.$$

Аналогичное утверждение имеет место с заменой $\mathscr{E}(Y)$ на $\mathscr{E}^{0,1}(Y)$.

*Доказательство.* Так как $T$ непрерывно, то найдется окрестность нуля $\mathcal{U}$ в $\mathcal{E}(Y)$, такая, что $|T[f]|<1$ для всех $f\in\mathcal{U}$. По определению топологии в $\mathcal{E}(Y)$, с обозначениями из (25.1), существуют элементы $j_1, \ldots, j_m\in J$, $\nu_1, \ldots, \nu_m\in\mathbb{N}^2$ и $\varepsilon>0$, такие, что

$$\mathcal{U}(p_{j_1\nu_1}, \varepsilon)\cap\ldots\cap\mathcal{U}(p_{j_m\nu_m}, \varepsilon)\subset\mathcal{U}.$$

Пусть $K:=K_{j_1}\cup\ldots\cup K_{j_m}$. Мы теперь покажем, что $T[f]=0$ для всякой $f\in\mathcal{E}(Y)$ с $\operatorname{Supp}(f)\subset Y\setminus K$. В самом деле, для произвольного $\lambda>0$ имеем

$$p_{j_1\nu_1}(\lambda f)=\ldots=p_{j_m\nu_m}(\lambda f)=0$$

и, значит, $\lambda f\in\mathcal{U}$ и $|T[\lambda f]|<1$. Но из этого следует, что $|T[f]|<1/\lambda$ для всех $\lambda>0$, а это возможно тогда и только тогда, когда $T[f]=0$, ч. т. д.

**25.3. Лемма.** *Пусть $Z$ — открытое подмножество римановой поверхности $X$ и $S$: $\mathcal{E}^{0,1}(X)\to\mathbb{C}$ — непрерывное линейное отображение с $S[\bar\partial g]=0$ для всех $g\in\mathcal{E}(X)$ с $\operatorname{Supp}(g)\Subset Z$. Тогда существует голоморфная дифференциальная форма $\sigma\in\Omega(Z)$, такая, что*

$$S[\omega]=\iint_Z\sigma\wedge\omega$$

*для всех $\omega\in\mathcal{E}^{0,1}(X)$ с $\operatorname{Supp}(\omega)\Subset Z$.*

*Доказательство.* Пусть $z$: $U\to V\subset\mathbb{C}$ есть карта на $X$, принадлежащая $Z$. Мы отождествляем $U$ с $V$. Для $\varphi\in\mathcal{D}(U)$ обозначим через $\tilde\varphi$ ту дифференциальную форму из $\mathcal{E}^{0,1}(X)$, которая равна $\varphi\,d\bar z$ на $U$, а на $X\setminus U$ равна нулю. Тогда отображение

$$S_U\colon\ \mathcal{D}(U)\to\mathbb{C},\quad \varphi\mapsto S[\tilde\varphi],$$

является распределением на $U$, которое обращается в нуль на всех функциях $\varphi$ вида $\varphi=\partial g/\partial\bar z$, $g\in\mathcal{D}(U)$, т. е. $\partial S_U/\partial\bar z=0$. Поэтому, согласно следствию 24.10, существует однозначно определенная голоморфная функция $h\in\mathcal{O}(U)$, такая, что

$$S[\tilde\varphi]=\iint_U h(z)\,\varphi(z)\,dz\wedge d\bar z\quad\text{для всех}\quad\varphi\in\mathcal{D}(U).$$

Положим $\sigma_U:=h\,dz$; тогда

$$S[\omega]=\iint_U\sigma_U\wedge\omega$$

для всех $\omega\in\mathcal{E}^{0,1}(X)$ с $\operatorname{Supp}(\omega)\Subset V$.

Проведем ту же конструкцию относительно другой карты $z': U' \to V'$; тогда получится дифференциальная форма $\sigma_{U'} \in \Omega(U')$ с соответствующими свойствами. Поэтому

$$\iint_U \sigma_U \wedge \omega = \iint_{U'} \sigma_{U'} \wedge \omega$$

для всех $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ с $\mathrm{Supp}(\omega) \Subset U \cap U'$. Отсюда следует, что $\sigma_U = \sigma_{U'}$ на $U \cap U'$. Поэтому $\sigma_U$ объединяются в одну дифференциальную форму $\sigma \in \Omega(Z)$, такую, что

$$(*) \qquad S[\omega] = \iint_Z \sigma \wedge \omega$$

для всех $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$, у которых носитель компактно принадлежит некоторой карте в $Z$. Если $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ — произвольная дифференциальная форма с $\mathrm{Supp}(\omega) \Subset Z$, то при помощи разбиения единицы можно построить разложение $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_n$, такое, что для каждой $\omega_j$ справедлива формула (*). Из этого следует, что

$$S[\omega] = \sum_{j=1}^{n} S[\omega_j] = \sum_{j=1}^{n} \iint_Z \sigma \wedge \omega_j = \iint_Z \sigma \wedge \omega.$$

**25.4. Предложение.** *Пусть $Y$ — относительно компактное множество Рунге на некомпактной римановой поверхности $X$. Тогда для всякого открытого множества $Y'$, такого, что $Y \subset Y' \Subset X$, образ при отображении сужения $\mathcal{O}(Y') \to \mathcal{O}(Y)$ является плотным относительно топологии компактной сходимости.*

*Доказательство.* Обозначим через $\beta$: $\mathcal{E}(Y') \to \mathcal{E}(Y)$ отображение сужения. Чтобы доказать, что $\beta(\mathcal{O}(Y'))$ плотно в $\mathcal{O}(Y)$, по теореме Хана — Банаха достаточно показать (см. приложение B.9), что

*Если $T$: $\mathcal{E}(Y) \to \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал, такой, что $T \mid \beta(\mathcal{O}(Y')) = 0$, то и $T \mid \mathcal{O}(Y) = 0$.*

*Доказательство.* Определим линейное отображение

$$S: \mathcal{E}^{0,1}(X) \to \mathbb{C}$$

следующим образом. Для $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$, согласно (14.16), существует функция $f \in \mathcal{E}(Y')$, такая, что $\bar\partial f = \omega \mid Y'$. Положим

$$S[\omega] := T[f \mid Y].$$

Это определение не зависит от выбора $f$, так как если и $\bar\partial g = \omega \mid Y'$, то $f - g \in \mathcal{O}(Y')$ и, значит, по предположению,

$T[(f-g)|Y]=0$. Покажем теперь, что $S$ также непрерывно. Для этого рассмотрим векторное пространство

$$V:=\{(\omega, f)\in\mathscr{E}^{0,1}(X)\times\mathscr{E}(Y'):\ \bar{\partial}f=\omega|Y'\}.$$

Это есть замкнутое векторное подпространство в $\mathscr{E}^{0,1}(X)\times\mathscr{E}(Y')$, и, значит, оно само является пространством Фреше. (Это следует из того, что отображение $\bar{\partial}: \mathscr{E}(Y')\longrightarrow\mathscr{E}^{0,1}(Y')$ непрерывно.)

Проекция $\mathrm{pr}_1$: $V\longrightarrow\mathscr{E}^{0,1}(X)$ сюръективна и, значит, по теореме Банаха, является открытым отображением. Отображение $\beta\circ\mathrm{pr}_2$: $V\longrightarrow\mathscr{E}(Y)$ непрерывно. Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\beta\circ\mathrm{pr}_2} & \mathscr{E}(Y) \\ {\scriptstyle\mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathscr{E}^{0,1}(X) & \xrightarrow{S} & \mathbb{C} \end{array}$$

по определению коммутативна, то из непрерывности $T$ следует непрерывность $S$.

По лемме 25.2, существует компактное подмножество $K\subset Y$, такое, что

(1) $T[f]=0$ для всех $f\in\mathscr{E}(Y)$ с $\mathrm{Supp}(f)\subset Y\smallsetminus K$, и компактное подмножество $L\subset X$, такое, что

(2) $S[\omega]=0$ для всех $\omega\in\mathscr{E}^{0,1}(X)$ с $\mathrm{Supp}(\omega)\subset X\smallsetminus L$.

Если $g\in\mathscr{E}(X)$—функция с $\mathrm{Supp}(g)\Subset X\smallsetminus K$, то $S[\bar{\partial}g]=$ $=T[g|Y]=0$. Таким образом, по лемме 25.3, существует голоморфная дифференциальная форма $\sigma\in\Omega(X\smallsetminus K)$, такая, что

$$S[\omega]=\iint\limits_{X\smallsetminus K}\sigma\wedge\omega$$

для всех $\omega\in\mathscr{E}^{0,1}(X)$ с $\mathrm{Supp}(\omega)\Subset X\smallsetminus K$. Согласно (2), должно быть $\sigma|X\smallsetminus(K\cup L)=0$. Никакая связная компонента в $X\smallsetminus \boldsymbol{h}(K)$ не является относительно компактной, и поэтому каждая из них пересекает $X\smallsetminus(K\cup L)$. Из теоремы единственности следует, что $\sigma|X\smallsetminus\boldsymbol{h}(K)=0$, т. е.

(3) $S[\omega]=0$ для всех $\omega\in\mathscr{E}^{0,1}(X)$ с $\mathrm{Supp}(\omega)\Subset X\smallsetminus\boldsymbol{h}(K)$.

Пусть теперь $f\in\mathcal{O}(Y)$. Покажем, что $T[f]=0$. Так как $Y$—множество Рунге, то $\boldsymbol{h}(K)\subset Y$. Поэтому существует функция $g\in\mathscr{E}(X)$, такая, что $f=g$ в окрестности $\boldsymbol{h}(K)$ и $\mathrm{Supp}(g)\Subset Y$. Согласно (1), $T[f]=T[g|Y]$, а по определению $S$, $T[g|Y]=S[\bar{\partial}g]$. Так как $g$ голоморфна в окрестности $\boldsymbol{h}(K)$, то $\mathrm{Supp}(\bar{\partial}g)\Subset X\smallsetminus\boldsymbol{h}(K)$ и, значит, $S[\bar{\partial}g]=0$, согласно (3). Резюмируя, мы получаем, что $T[f]=0$ для всех $f\in\mathcal{O}(Y)$, ч. т. д.

**25.5. Аппроксимационная теорема Рунге.** *Пусть $X$—некомпактная риманова поверхность и $Y$—открытое подмножество в $X$, дополнение к которому не содержит компактных связ-*

*ных компонент. Тогда всякую голоморфную на $Y$ функцию можно аппроксимировать голоморфными функциями на $X$, равномерно на компактных подмножествах в $Y$.*

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда $Y$ относительно компактно в $X$. Пусть заданы $f \in \mathcal{O}(Y)$, компактное подмножество $K \subset Y$ и $\varepsilon > 0$. Согласно (23.9), существует исчерпание $Y_1 \Subset Y_2 \Subset Y_3 \Subset \ldots$ поверхности $X$ областями Рунге, такое, что $Y_0 := Y \Subset Y_1$. По предложению 25.4, найдется голоморфная функция $f_1 \in \mathcal{O}(Y_1)$, такая, что

$$\|f_1 - f\|_K < 2^{-1}\varepsilon$$

(здесь $\| \, \|_K$ обозначает sup-норму на $K$).

По индукции, из предложения 25.4 получается последовательность функций $f_n \in \mathcal{O}(Y_n)$, таких, что

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{\overline{Y}_{n-2}} < 2^{-n}\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \geqslant 2.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(f_\nu)_{\nu > n}$ сходится равномерно на $Y_n$. Поэтому существует голоморфная на всей $X$ функция $F \in \mathcal{O}(X)$, которая на каждом $Y_n$ является пределом последовательности $(f_\nu)_{\nu > n}$. Эта функция, по построению, удовлетворяет неравенству $\|F - f\|_K < \varepsilon$, ч. т. д.

**25.6. Предложение.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность. Тогда для всякой дифференциальной формы $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ существует функция $f \in \mathcal{E}(X)$, такая, что $\bar{\partial} f = \omega$.*

*Доказательство.* Для всякого относительно компактного подмножества $Y \Subset X$, согласно (14.16), существует функция $g \in \mathcal{E}(Y)$ с $\bar{\partial} g = \omega | Y$. Теперь мы докажем наше предложение, подобно предложению 13.2, методом исчерпания.

Пусть $Y_0 \Subset Y_1 \Subset Y_2 \Subset \ldots$ есть исчерпание $X$ областями Рунге, как в (23.9). Построим индукцией по $n$ функции $f_n \in \mathcal{E}(Y_n)$, такие, что

(i) $\bar{\partial} f_n = \omega | Y_n$,

(ii) $\|f_{n+1} - f_n\|_{Y_{n-1}} \leqslant 2^{-n}$.

В качестве функции $f_0 \in \mathcal{E}(Y_0)$ выберем произвольное решение дифференциального уравнения $\bar{\partial} f_0 = \omega | Y_0$. Пусть $f_0, \ldots, f_n$ уже построены. Существует $g_{n+1} \in \mathcal{E}(Y_{n+1})$, такая, что $\bar{\partial} g_{n+1} = \omega | Y_{n+1}$. На $Y_n$ имеем $\bar{\partial} g_{n+1} = \bar{\partial} f_n$ и, значит, $g_{n+1} - f_n$ голоморфна на $Y_n$. По аппроксимационной теореме Рунге, существует $h \in \mathcal{O}(Y_{n+1})$ с

$$\|(g_{n+1} - f_n) - h\|_{Y_{n-1}} \leqslant 2^{-n}.$$

Мы полагаем $f_{n+1} := g_{n+1} - h$.

Тогда $\bar\partial f_{n+1} = \bar\partial g_{n+1} = \omega | Y_{n+1}$ и $\|f_{n+1} - f_n\|_{Y_{n-1}} \leqslant 2^{-n}$. Как и в доказательстве (13.2), теперь получается, что функции $f_n$ стремятся к решению $f \in \mathcal{E}(X)$ дифференциального уравнения $\bar\partial f = \omega$.

## § 26. Теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса

Теперь мы займемся построением мероморфных функций с заданными главными частями, соотв. с заданными нулями и полюсами, на некомпактных римановых поверхностях (т. е. аналогами теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса в комплексной плоскости). В § 18 и 20 мы уже изучали аналогичные проблемы на компактных римановых поверхностях. Там для разрешимости этих проблем надо было ставить определенные условия (предложения 18.2 и 20.7). Здесь же мы установим, что на некомпактных римановых поверхностях аналоги теорем Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса справедливы без всяких ограничений.

**26.1. Предложение.** *Для всякой некомпактной римановой поверхности $X$ имеем*

$$H^1(X, \mathcal{O}) = 0.$$

*Доказательство.* По теореме Дольбо (15.14), $H^1(X, \mathcal{O}) \cong \cong \mathcal{E}^{0,1}(X)/\bar\partial\mathcal{E}(X)$. Но, по предложению 25.6, $\mathcal{E}^{0,1}(X) = \bar\partial\mathcal{E}(X)$, т. е. $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$.

*Замечание.* Предложение 26.1 является частным случаем так называемой теоремы B, принадлежащей Картану и Серру и справедливой для любого $n$-мерного многообразия Штейна, см. [31], [33].

**26.2.** Напомним понятие системы Миттаг-Леффлера, см. (18.1). Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие римановой поверхности $X$. Семейство $\mu = (f_i)_{i \in I}$ мероморфных функций $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ называется системой Миттаг-Леффлера, когда разности $f_i - f_j$ голоморфны в $U_i \cap U_j$, т. е. $f_i$ и $f_j$ имеют одинаковые главные части в $U_i \cap U_j$. Под решением такой системы $\mu$ понимается глобальная мероморфная функция $f \in \mathcal{M}(X)$, такая, что для каждого $i \in I$ разность $f - f_i$ голоморфна в $U_i$. Семейство разностей $f_{ij} := f_j - f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ определяет коцикл $(f_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Мы доказали в (18.1), что $\mu$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешим этот коцикл, т. е. $(f_{ij}) \in B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Поэтому из предложения 26.1 следует

**26.3. Предложение.** *На некомпактной римановой поверхности всякая система Миттаг-Леффлера разрешима.*

Теперь перейдем к аналогу мультипликативной теоремы Вейерштрасса. Здесь для заданного дивизора $D\colon X \longrightarrow \mathbb{Z}$ на римановой поверхности $X$ ищется мероморфная функция $f \in \mathcal{M}^*(X)$, которая имеет нули и полюсы (с учетом кратностей), описываемые дивизором $D$, т. е. $(f)=D$; см. определения 16.1 и 16.2. В (20.1) мы определили понятие слабого решения.

**26.4. Лемма.** *Всякий дивизор $D$ на некомпактной римановой поверхности $X$ обладает слабым решением.*

*Доказательство.* (a) Выберем последовательность $K_1, K_2, \ldots$ компактных подмножеств в $X$ со следующими свойствами:

(i) $K_j = \boldsymbol{h}(K_j)$ для всех $j \geqslant 1$,

(ii) $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ для всех $j \geqslant 1$,

(iii) $\bigcup\limits_{j \geqslant 1} K_j = X$.

Это возможно, согласно (23.6).

(b) *Промежуточное утверждение.* Пусть $a_0 \in X \setminus K_j$ и $A_0$ — дивизор с $A_0(a_0)=1$ и $A_0(x)=0$ для $x \neq a_0$. Тогда существует слабое решение $\varphi$ для $A_0$ с $\varphi \mid K_j = 1$.

*Доказательство.* Так как $K_j = \boldsymbol{h}(K_j)$, то $a_0$ лежит в некоторой связной компоненте $U$ множества $X \setminus K_j$, которая не является относительно компактной. Поэтому найдется точка $a_1 \in U \setminus K_{j+1}$ и кривая $c_0$ в $U$ с началом $a_1$ и концом $a_0$. По лемме 20.5, существует слабое решение $\varphi_0$ дивизора $\partial c_0$ с $\varphi_0 \mid K_j = 1$. Повторяя эту конструкцию, мы получаем последовательность точек $a_\nu \in X \setminus K_{j+\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, кривых $c_\nu$ в $X \setminus K_{j+\nu}$ из $a_{\nu+1}$ в $a_\nu$ и слабых решений $\varphi_\nu$ дивизоров $\partial c_\nu$ с $\varphi_\nu \mid K_{j+\nu} = 1$. Имеем $\partial c_\nu = A_\nu - A_{\nu+1}$, где $A_\nu$ — дивизор, который в $a_\nu$ принимает значение 1, а в остальном равен нулю. Поэтому произведение $\varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_n$ является слабым решением дивизора $A_0 - A_{n+1}$. Бесконечное произведение

$$\varphi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu$$

сходится, так как на каждой компактной части в $X$ есть только конечное число множителей $\neq 1$. Это $\varphi$ является слабым решением дивизора $A_0$.

(c) Пусть теперь $D$ — произвольный дивизор на $X$. Для $\nu \in \mathbb{N}$ мы полагаем

$$D_\nu(x) := \begin{cases} D(x), & \text{если} \quad x \in K_{\nu+1} \setminus K_\nu, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin K_{\nu+1} \setminus K_\nu \end{cases}$$

(здесь $K_0 := \varnothing$). Тогда

$$D = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu.$$

Так как $D_\nu$ отличен от 0 лишь в конечном числе точек, то, согласно (b), существует слабое решение $\psi_\nu$ дивизора $D_\nu$ с $\psi_\nu | K_\nu = 1$. Произведение

$$\psi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu$$

является тогда слабым решением для $D$.

**26.5. Предложение.** *На некомпактной римановой поверхности $X$ всякий дивизор $D \in \mathrm{Div}(X)$ является дивизором некоторой мероморфной функции $f \in \mathcal{M}^*(X)$.*

*Доказательство.* Так как проблема локально разрешима, то существует открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ поверхности $X$ и мероморфные функции $f_i \in \mathcal{M}^*(U_i)$, дивизоры которых в $U_i$ совпадают с $D$. Мы можем считать, что все $U_i$ односвязны. На пересечении $U_i \cap U_j$ функции $f_i$ и $f_j$ имеют одинаковые нули и полюсы, т. е.

$$\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j) \quad \text{для всех} \quad i, j \in I.$$

Пусть теперь $\psi$ есть слабое решение $D$, существующее согласно (25.4). На $U_i$ тогда $\psi = \psi_i f_i$ с функцией $\psi_i \in \mathcal{E}(U_i)$ без нулей на $U_i$. Так как $U_i$ односвязна, то существует функция $\varphi_i \in \mathcal{E}(U_i)$, такая, что $\psi_i = e^{\varphi_i}$, т. е. $\psi = e^{\varphi_i} f_i$ на $U_i$. Тогда на $U_i \cap U_j$ имеем

$$(*) \qquad e^{\varphi_j - \varphi_i} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j),$$

откуда следует, что $\varphi_{ij} := \varphi_j - \varphi_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Так как $\varphi_{ij} + \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ на тройных пересечениях, то семейство функций $\varphi_{ij}$ образует коцикл $(\varphi_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Поскольку $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, этот коцикл разрешим, и, значит, существуют голоморфные функции $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$, такие, что

$$\varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i = g_j - g_i \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j$$

для всех $i, j \in I$. Из (*) тогда следует, что $e^{g_j - g_i} = f_i / f_j$, т. е.

$$e^{g_j} f_j = e^{g_i} f_i \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Поэтому существует глобальная мероморфная функция $f \in \mathcal{M}^*(X)$, такая, что $f = e^{g_i} f_i$ на $U_i$ для всех $i \in I$. Так как $f$ и $f_i$ на $U_i$ имеют одинаковые дивизоры, то $(f) = D$, ч. т. д.

**26.6. Следствие.** *На всякой некомпактной римановой поверхности $X$ существует голоморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega(X)$ без нулей.*

*Доказательство.* Пусть $g$ — непостоянная мероморфная функция на $X$ и $f \in \mathcal{M}^*(X)$ — функция с дивизором $-(dg)$. Тогда $\omega := f\,dg$ есть голоморфная дифференциальная форма на $X$, нигде не равная нулю.

**26.7. Предложение.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ — последовательность попарно различных точек, не имеющая предельных точек в $X$. Тогда для любых наперед заданных чисел $c_\nu \in \mathbb{C}$ существует голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(X)$, такая, что $f(a_\nu) = c_\nu$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$.*

*Доказательство.* По предложению 26.5, существует функция $h \in \mathcal{O}(X)$, которая в каждой $a_\nu$ имеет нуль первого порядка, а в остальном отлична от нуля. Для $i \in \mathbb{N}$ пусть

$$U_i := X \setminus \bigcup_{\nu \neq i} \{a_\nu\}.$$

Тогда $\mathfrak{U} := (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть открытое покрытие $X$. Мы определяем $g_i \in \mathcal{M}(U_i)$, полагая $g_i := c_i/h$. Для $i \neq j$ имеем

$$U_i \cap U_j = X \setminus \{a_\nu \colon \nu \in \mathbb{N}\},$$

и, значит, $1/h$ голоморфна в $U_i \cap U_j$. Поэтому $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ есть система Миттаг-Леффлера на $X$, которая, согласно (26.3), обладает решением $g \in \mathcal{M}(X)$. Пусть $f := gh$. В $U_i$ имеем

$$f = gh = g_i h + (g - g_i) h = c_i + (g - g_i) h.$$

Так как $g - g_i$ голоморфна в $U_i$ и $h(a_i) = 0$, то $f \in \mathcal{O}(X)$ и $f(a_i) = c_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

**26.8. Следствие.** *Всякая некомпактная риманова поверхность $X$ является многообразием Штейна, т. е.*

(i) *для любых двух точек $x, y \in X$, $x \neq y$, существует голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(X)$, такая, что $f(x) \neq f(y)$;*

(ii) *для всякой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, не имеющей в $X$ предельных точек, существует голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(X)$, такая, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |f(x_n)| = \infty$.*

*Замечание.* Теоремы Миттаг-Леффлера и Вейерштрасса для некомпактных римановых поверхностей первоначально доказала Флорак [54] при помощи методов, развитых Бенке и Штейном [51]. Аналоги этих проблем в теории функций многих переменных (первая и вторая проблемы Кузена) сыграли

большую роль в развитии теории многообразий Штейна, см. [53], [59], [61]. Оттуда же берут свое начало используемые выше когомологические методы.

## § 27. Теорема Римана об отображениях

Теорема Римана об отображениях утверждает, что всякую односвязную риманову поверхность, не изоморфную $\mathbb{P}_1$ или $\mathbb{C}$, можно биголоморфно отобразить на единичный круг. Это означает, что универсальная накрывающая любой римановой поверхности всегда изоморфна одной из трех нормальных форм: римановой числовой сфере, гауссовой числовой плоскости или единичному кругу. Теорема Римана об отображениях была приведена Риманом в его диссертации еще в 1851 г., правда, не в самой общей форме и с небезупречным доказательством. Первые полные доказательства принадлежат А. Пуанкаре и П. Кёбе и получены в 1907 г.

**27.1.** Для римановой поверхности $X$ мы обозначаем через $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) := \Omega(X)/d\mathcal{O}(X)$ «голоморфную» группу де Рама, см. (15.15). Если $X$ односвязна, то всякая голоморфная дифференциальная форма на $X$ обладает первообразной (см. (10.7)), т. е. $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Мы докажем теорему Римана об отображениях как будто для более общих римановых поверхностей, а именно для тех, у которых $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Однако из $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$ следует, что такая $X$ односвязна.

**27.2. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность с $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Тогда*

(i) *Для всякой голоморфной функции $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ существуют ветви логарифма и корня, т. е. существуют функции $g, h \in \mathcal{O}(X)$, такие, что $e^g = f$ и $h^2 = f$.*

(ii) *Всякая гармоническая функция $u\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ является вещественной частью некоторой голоморфной функции $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$.*

*Доказательство.* (i) Дифференциальная форма $f^{-1}df$ голоморфна на $X$. Так как $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$, то существует функция $g \in \mathcal{O}(X)$ с $dg = f^{-1}df$. Добавляя, если надо, константу к $g$, мы можем считать, что $e^{g(a)} = f(a)$ для фиксированной точки $a \in X$. Имеем

$$d(fe^{-g}) = (df)\,e^{-g} - fe^{-g}f^{-1}\,df = 0,$$

значит, $fe^{-g}$ есть константа, равная 1, откуда следует, что $e^g = f$.

Для $h := e^{g/2}$ тогда имеем $h^2 = f$.

(ii) По предложению 19.4, существует голоморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega(X)$, такая, что $du = \operatorname{Re}(\omega)$. Так как $\Omega(X) = d\mathcal{O}(X)$, то $du = \operatorname{Re}(dg)$ с $g \in \mathcal{O}(X)$ и, значит, $u = \operatorname{Re}(g) + \text{const}$.

**27.3. Предложение.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и $Y \Subset X$ — область, для которой $\operatorname{Rh}^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$. Пусть граница $Y$ регулярна относительно задачи Дирихле. Тогда существует биголоморфное отображение $Y$ на единичный круг $E$.*

*Доказательство.* Выберем точку $a \in Y$. По теореме Вейерштрасса (26.5), существует голоморфная функция $g$ на $X$, которая в $a$ имеет нуль первого порядка и нигде в $X \setminus a$ не равна нулю. По предложению 22.17, существует непрерывная в $\overline{Y}$ и гармоническая в $Y$ функция $u$: $\overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, такая, что

$$(*) \qquad u(y) = \log|g(y)| \quad \text{для всех} \quad y \in \partial Y.$$

По лемме 27.2 (ii), $u$ является вещественной частью некоторой голоморфной функции $h \in \mathcal{O}(Y)$. Положим

$$f := e^{-h} g \in \mathcal{O}(Y).$$

*Утверждение.* Функция $f$ биголоморфно отображает $Y$ на единичный круг $E$.

Покажем сначала, что $f(Y) \subset E$. Для $y \in Y \setminus a$ имеем

$$|f(y)| = |e^{-h(y)}|\,|g(y)| = e^{\log|g(y)| - u(y)}.$$

Поэтому определенную на $Y$ функцию $|f|$ можно продолжить до непрерывной функции $\varphi$: $\overline{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$, которая из-за $(*)$ на $\partial Y$ постоянна и равна 1. Из принципа максимума теперь следует, что $|f(y)| < 1$ для всех $y \in Y$, т. е. $f(Y) \subset E$.

Теперь покажем, что отображение $f$: $Y \longrightarrow E$ собственное. Для этого достаточно показать, что при каждом $r < 1$ прообраз $Y_r$ круга $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leqslant r\}$ компактно принадлежит $Y$. Имеем

$$Y_r = \{y \in Y: |f(y)| \leqslant r\} = \{y \in \overline{Y}: \varphi(y) \leqslant r\}.$$

Таким образом, $Y_r$ есть замкнутая часть компактного множества $\overline{Y}$, и поэтому $Y_r$ — компакт.

Так как отображение $f$: $Y \longrightarrow E$ собственное, то каждое значение принимается им одинаково часто (предложение 4.24). Но значение нуль принимается ровно один раз. Таким образом, $f$: $Y \longrightarrow E$ биективно и поэтому биголоморфно, ч. т. д.

**27.4.** Общую теорему Римана об отображениях мы выведем из предложения 27.3 методом исчерпания. Для этого нам нужны несколько заготовок.

*Обозначение.* Для $r \in (0, \infty]$ пусть

$$E(r) := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}.$$

В частности, $E(1) = E$ есть единичный круг и $E(\infty) = \mathbb{C}$ — вся числовая плоскость.

Следующее утверждение является простым следствием интегральной формулы Коши.

Если $f: E(r) \longrightarrow E(r')$ — голоморфное отображение, то

$$|f'(0)| \leqslant \frac{r'}{r}.$$

**27.5. Лемма.** *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область, дополнение к которой $\mathbb{C} \setminus G$ содержит внутренние точки, и пусть $w_0 \in G$. Тогда множество*

$$\{f \in \mathcal{O}(E): f(E) \subset G \text{ и } f(0) = w_0\}$$

*компактно в $\mathcal{O}(E)$ относительно топологии компактной сходимости.*

*Доказательство.* Пусть $a$ — внутренняя точка в $\mathbb{C} \setminus G$. Тогда при помощи $z \longmapsto \frac{1}{z-a}$ область $G$ биголоморфно отображается на подобласть круга $E(r)$ с $r < \infty$. Поэтому утверждение следует из теоремы Монтеля.

**27.6. Предложение.** *Множество $\mathcal{S}$ всех однолистных (= инъективных) голоморфных функций $f: E \longrightarrow \mathbb{C}$ с $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$ компактно в $\mathcal{O}(E)$.*

*Доказательство.* (a) Пусть $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность функций из $\mathcal{S}$. Надо показать, что в ней содержится подпоследовательность, которая сходится к некоторой функции $f \in \mathcal{S}$. Обозначим через $r_n$ максимальный радиус, такой, что $E(r_n) \subset f_n(E)$. Тогда $r_n \leqslant 1$, так как обратное к $f_n$ отображение $\varphi_n$ отображает $E(r_n)$ в $E$, из чего следует, что $1 = \varphi_n'(0) \leqslant 1/r_n$. Выберем точку $a_n \in \partial E(r_n)$, $a_n \notin f_n(E)$, и положим $g_n := f_n/a_n$. Тогда

$$E \subset g_n(E) \qquad \text{и} \qquad 1 \notin g_n(E).$$

(b) Так как $g_n(E)$ гомеоморфно $E$ и поэтому односвязно, то существует голоморфная функция $\psi: g_n(E) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, такая, что $\psi(0) = i$ и $\psi(z)^2 = z - 1$ для всех $z \in g_n(E)$. Положим $h_n := \psi \circ g_n$; тогда $h_n^2 = g_n - 1$.

*Утверждение.* Из $w \in h_n(E)$ следует, что $-w \notin h_n(E)$.

В самом деле, предположим, что $w = h_n(z_1)$ и $-w = h_n(z_2)$ для некоторых $z_1, z_2 \in E$. Так как $w^2 = (-w)^2$, то отсюда сле-

дует, что $g_n(z_1)=g_n(z_2)$, а так как $g_n$ инъективно, то $z_1=z_2$ и, значит, $w=-w$. Противоречие!

(c) Так как $E\subset g_n(E)$, то $U:=\psi(E)\subset h_n(E)$. Отсюда следует, что $(-U)\cap h_n(E)=\varnothing$. По лемме 27.5, последовательность $(h_n)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $f_n=a_n(1+h_n^2)$ и $|a_n|\leqslant 1$ для всех $n$, то последовательность $(f_n)$ тоже обладает сходящейся подпоследовательностью $(f_{n_k})$, которая сходится к некоторой функции $f\colon E\to\mathbb{C}$. Естественно, опять $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и, значит, $f$ не постоянна.

(d) Остается еще показать, что $f$ однолистна. В противном случае существует $a\in\mathbb{C}$, такое, что $f-a$ имеет в $E$ по крайней мере два нуля. Тогда найдется $r<1$, такое, что $f-a$ в $E(r)$ имеет, с учетом кратностей, $k\geqslant 2$ нулей и на $\partial E(r)$ нигде не равна нулю. Следовательно,

$$k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz.$$

Отсюда вытекает, что всякая функция, достаточно близкая к $f$, принимает значение $a$ тоже $k$-кратно. Но это находится в противоречии с однолистностью функций $f_{n_k}$.

**27.7. Лемма.** *Пусть $R\in(0,\infty]$ и $Y$ — собственная подобласть в $E(R)$, причем $0\in Y$ и $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(Y)=0$. Тогда существует $r<R$ и голоморфное отображение $f\colon Y\to E(r)$, такое, что $f(0)=0$ и $f'(0)=1$.*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай $R<\infty$. Без ограничения общности мы полагаем $R=1$, т. е. $Y\subset E$. По условию, существует точка $a\in E\setminus Y$. Пусть $\varphi\colon E\to E$ есть биголоморфное отображение, определяемое формулой

$$\varphi(z):=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Тогда $0\notin\varphi(Y)$ и, значит, по лемме 27.2, существует функция $g\in\mathcal{O}(Y)$ с $g^2=\varphi|Y$. Тогда $g(Y)\subset E$. Положим

$$\psi(z):=\frac{z-b}{1-\bar{b}z},\qquad \text{где } b:=g(0).$$

Тогда для отображения $h:=\psi\circ g\colon Y\to E$ имеем $h(0)=0$ и

$$\gamma:=h'(0)=\psi'(b)\,g'(0)=\psi'(b)\frac{\varphi'(0)}{2g(0)}=\frac{1}{1-|b|^2}\,\frac{1-|a|^2}{2b}=\frac{1+|b|^2}{2b},$$

так как $b^2=-a$. Отсюда следует, что $|\gamma|>1$. Поэтому, полагая $r:=1/|\gamma|$ и $f:=h/\gamma$, мы получаем отображение $f\colon Y\to E(r)$ с требуемыми свойствами.

Случай $R=\infty$ рассматривается аналогично.

**27.8. Лемма.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность с* $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X)=0$ *и* $Y\subset X$ — *область Рунге. Тогда также* $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(Y)=0$.

*Доказательство.* Пусть $\omega\in\Omega(Y)$ — произвольная голоморфная дифференциальная форма на $Y$. Надо показать, что $\omega$ обладает первообразной функцией. Согласно следствию 26.6, выберем некоторую голоморфную дифференциальную форму $\omega_0$ на $X$, не имеющую нулей. Тогда $\omega$ можно записать в виде $\omega=f\omega_0$ с $f\in\mathcal{O}(Y)$. По аппроксимационной теореме Рунге, существует последовательность $f_n\in\mathcal{O}(X)$, $n\in\mathbb{N}$, которая на $Y$ компактно сходится к $f$. Поэтому для всякой замкнутой кривой $\alpha$ в $Y$ интегралы $\int_\alpha f_n\omega_0$ сходятся к $\int_\alpha \omega$. Так как всякая дифференциальная форма $f_n\omega_0$ на $X$ обладает первообразной функцией, то $\int_\alpha f_n\omega_0=0$ и, значит, $\int_\alpha\omega=0$. Так как все периоды $\omega$ равны нулю, то, по предложению 10.15, $\omega$ обладает первообразной функцией, ч. т. д.

**27.9. Теорема Римана об отображениях.** *Пусть $X$ — риманова поверхность с* $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X)=0$. *Тогда $X$ можно биголоморфно отобразить на риманову числовую сферу $\mathbb{P}_1$, или на гауссову числовую плоскость $\mathbb{C}$, или на единичный круг $E$.*

Как уже упоминалось в (27.1), предположение $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X)=0$ выполняется для односвязных $X$. Так как $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{C}$ и $E$ односвязны, то из этой теоремы следует обратная импликация $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X)=0\Rightarrow\pi_1(X)=0$.

*Доказательство.* (a) Если $X$ — компакт, то всякая голоморфная функция на $X$ постоянна и, значит, $d\mathcal{O}(X)=0$. Поэтому из $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(X)=0$ следует, что $\Omega(X)=0$, т. е. $X$ имеет род нуль. А тогда, по следствию 16.13, поверхность $X$ изоморфна $\mathbb{P}_1$.

(b) Итак, мы можем предполагать, что $X$ некомпактна. По предложению 23.9, существует исчерпание $Y_0\Subset Y_1\Subset Y_2\Subset\ldots$ поверхности $X$ областями Рунге $Y_n$, границы которых регулярны относительно задачи Дирихле. По лемме 27.8, $\mathrm{Rh}^1_{\mathcal{O}}(Y_n)=0$ для всех $n$ и, значит, каждую $Y_n$, по предложению 27.3, можно биголоморфно отобразить на единичный круг. Выберем некоторую точку $a\in Y_0$ и ее координатную окрестность $(U, z)$. Тогда существуют вещественные числа $r_n>0$ и биголоморфные отображения

$$f_n\colon\ Y_n\longrightarrow E(r_n),$$

такие, что

$$f_n(a)=0 \quad \text{и} \quad \frac{df_n}{dz}(a)=1.$$

(c) Имеем $r_n \leqslant r_{n+1}$ для всех $n$. В самом деле, для отображения

$$h := f_{n+1} \circ f_n^{-1}\colon\ E(r_n) \longrightarrow E(r_{n+1})$$

получается, что $h(0)=0$, $h'(0)=1$, и тогда, по замечанию в (27.4), имеем $1=h'(0)\leqslant r_{n+1}/r_n$. Пусть

$$R := \lim_{n\to\infty} r_n \in (0,\ \infty].$$

Мы покажем, что $X$ можно биголоморфно отобразить на $E(R)$.

(d) *Утверждение.* Существует подпоследовательность $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такая, что для всякого $m$ последовательность $(f_{n_k} \mid Y_m)_{k\geqslant m}$ компактно сходится на $Y_m$.

Отображение $z \longmapsto f_0^{-1}(r_0 z)$ биголоморфно отображает $E$ на $Y_0$. Положим

$$g_n(z) := \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z)) \qquad (n \geqslant 0);$$

тогда $g_n\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ есть однолистная голоморфная функция с $g_n(0)=0$ и $g_n'(0)=1$. Поэтому из предложения 27.6 вытекает существование подпоследовательности $(f_{n_{0k}})_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $(f_n)$, которая компактно сходится на $Y_0$. Таким же образом мы можем выбрать из этой подпоследовательности следующую подпоследовательность $(f_{n_{1k}})$, которая компактно сходится на $Y_1$. Повторяя этот процесс, мы для каждого $m$ получаем подпоследовательность $(f_{n_{mk}})$ предыдущей последовательности, которая компактно сходится на $Y_m$. Положим $f_{n_k} := f_{n_{kk}}$. Тогда последовательность $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ обладает требуемым свойством.

Пусть $f \in \mathcal{O}(X)$ есть предел последовательности $(f_{n_k})$, т. е. та голоморфная на $X$ функция, которая на каждой $Y_m$ совпадает с пределом последовательности $(f_{n_k} \mid Y_m)_{k\geqslant m}$. Отображение $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ инъективно и

$$f(a)=0, \qquad \frac{df}{dz}(a)=1.$$

(e) *Утверждение.* Функция $f$ биголоморфно отображает $X$ на $E(R)$.

Так как, очевидно, $f(X)\subset E(R)$, то достаточно показать, что $f\colon X \longrightarrow E(R)$ сюръективно. Предположим, что это не так. Тогда, по лемме 27.7, существует $r<R$ и голоморфное ото-

бражение $g\colon f(X) \longrightarrow E(r)$, такое, что $g(0)=0$ и $g'(0)=1$. Пусть $n$ настолько велико, что $r_n > r$. Отображение

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1}\colon\ E(r_n) \longrightarrow E(r)$$

тоже удовлетворяет условиям $h(0)=0$ и $h'(0)=1$. Но из-за $r < r_n$ это невозможно. Поэтому отображение $f\colon X \longrightarrow E(R)$ сюръективно, и теорема Римана об отображениях доказана.

**27.10.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $p\colon \tilde{X} \to X$ — ее универсальное накрытие. Так как поверхность $\tilde{X}$ односвязна, то к $\tilde{X}$ можно применить теорему Римана об отображениях. Поверхность $X$ называется *эллиптической*, *параболической* или *гиперболической*, смотря чему изоморфно универсальное накрытие — $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{C}$ или $E$.

Пусть $G = \operatorname{Deck}(\tilde{X}/X)$ есть группа накрывающих преобразований универсального накрытия. Каждое $\sigma \in G$ является автоморфизмом $\tilde{X}$, т. е. биголоморфным отображением $\tilde{X}$ на себя. Группа $G$ действует на $\tilde{X}$ без неподвижных точек и дискретно, т. е.

(i) Если $\sigma \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$, то $\sigma x \neq x$ для всех $x \in \tilde{X}$.

(ii) Для каждой $x \in \tilde{X}$ ее орбита

$$Gx := \{\sigma x\colon\ \sigma \in G\}$$

является дискретным подмножеством в $\tilde{X}$.

Свойство (i) следует из того, что накрывающее преобразование определяется уже однозначно, если для некоторой точки известен ее образ, а (ii) справедливо потому, что универсальное накрытие $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ является накрытием Галуа и поэтому $Gx = p^{-1}(p(x))$.

Риманову поверхность $X$ можно понимать как фактор $\tilde{X}$ по $G$, т. е. две точки в $\tilde{X}$ отождествляются, если их можно перевести одну в другую при помощи некоторого элемента $\sigma \in G$. Таким образом, всякая гиперболическая риманова поверхность является фактором единичного круга $E$ по некоторой группе автоморфизмов $E$, действующей дискретно и без неподвижных точек.

**27.11. Лемма.** (a) *Всякий автоморфизм $\mathbb{P}_1$ имеет неподвижную точку.*

(b) *Пусть $G$ есть группа автоморфизмов плоскости $\mathbb{C}$, действующая дискретно и без неподвижных точек. Тогда имеет место один из следующих трех случаев:*

(i) $G = \{\mathrm{id}\}$;

(ii) *$G$ состоит из всех переносов вида*

$$z \mapsto z + n\gamma, \quad n \in \mathbb{Z},$$

*где $\gamma$ — фиксированное комплексное число, не равное* 0;

(iii) *$G$ состоит из всех переносов вида*

$$z \mapsto z + n\gamma_1 + m\gamma_2, \quad n,\ m \in \mathbb{Z},$$

*где $\gamma_1$, $\gamma_2$ — фиксированные $\mathbb{R}$-линейно независимые комплексные числа.*

*Доказательство.* (a) Автоморфизмы $\mathbb{P}_1$, как известно, порождаются дробно-линейными отображениями вида

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

А всякое такое преобразование имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

(b) Автоморфизмы $\mathbb{C}$ — это аффинно линейные отображения вида

$$z \mapsto az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Если $a \neq 1$, то эти преобразования имеют неподвижные точки. Таким образом, группа $G$ состоит только из преобразований вида $z \mapsto z + b$. Пусть $\Gamma$ есть орбита нуля относительно $G$. Тогда $\Gamma$ — дискретная аддитивная подгруппа в $\mathbb{C}$ и $G$ состоит из всех преобразований $z \mapsto z + b$ с $b \in \Gamma$. Пусть $V \subset \mathbb{C}$ есть наименьшее $\mathbb{R}$-линейное векторное подпространство, содержащее $\Gamma$. Тогда, в зависимости от размерности $V$, которая может равняться 0, 1 или 2, получаются соответственно случаи (i), (ii) или (iii). Это следует из предложения 21.1.

**27.12. Предложение.** (a) *Риманова числовая сфера $\mathbb{P}_1$ является эллиптической римановой поверхностью.*

(b) *Гауссова числовая плоскость $\mathbb{C}$, проколотая плоскость $\mathbb{C}^*$, а также все торы $\mathbb{C}/\Gamma$ суть параболические римановы поверхности.*

(c) *Всякая риманова поверхность, не изоморфная ни одной из поверхностей, перечисленных в* (a) *и* (b), *является гиперболической поверхностью.*

Таким образом, в частности, компактная риманова поверхность является эллиптической, параболической или гиперболической, смотря чему равен ее род — соответственно нулю, единице или больше единицы.

*Замечание.* Компактные римановы поверхности рода 1 еще называют *эллиптическими кривыми*. Это легко может привести

к путанице с приведенной выше терминологией. Поэтому название эллиптическая риманова поверхность для $\mathbb{P}_1$ будет употребляться только изредка.

*Доказательство.* Утверждения (a) и (b) очевидны. Остается показать, что если $X$ — не гиперболическая риманова поверхность, то $X$ изоморфна одному из названных в (a) или (b) типу поверхностей.

*Случай 1.* Универсальная накрывающая $X$ изоморфна $\mathbb{P}_1$. Тогда из леммы 27.11 (a) следует, что $X$ сама изоморфна $\mathbb{P}_1$.

*Случай 2.* Универсальная накрывающая $X$ изоморфна $\mathbb{C}$. Для группы накрывающих преобразований $G$, согласно (27.11b), возможны только варианты (i), (ii) и (iii). В случае (i) $X$ изоморфна $\mathbb{C}$, а в случае (ii) $X$ изоморфна $\mathbb{C}^*$, так как тогда накрытие изоморфно

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \exp\left(\frac{2\pi i}{\gamma} z\right).$$

Наконец, в случае (iii) $X$ есть тор.

Простым следствием из этого предложения является так называемая малая теорема Пикара.

**27.13. Предложение.** *Пусть $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда $f$ принимает каждое значение $c \in \mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного.*

*Доказательство.* Предположим, что $f$ выпускает два значения $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Риманова поверхность $X := \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, по предложению 27.12, гиперболическая. Мы можем поднять отображение $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow X$ до отображения $\tilde{f}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{X}$ в универсальное накрытие $\tilde{X}$ поверхности $X$. Так как $\tilde{X}$ изоморфно единичному кругу, то из теоремы Лиувилля следует, что $\tilde{f}$, а значит, и $f$ постоянно, — противоречие!

## § 28. Функции с заданными автоморфными слагаемыми

Мы уже видели в § 10, что при интегрировании дифференциальных форм на римановой поверхности $X$ возникают аддитивные автоморфные функции, автоморфные слагаемые которых определяют «гомоморфизм периодов» $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$. Бенке и Штейн [51] показали, что и обратно, для заданного гомоморфизма $\pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ на некомпактной римановой поверхности $X$ всегда найдется голоморфная дифференциальная форма с такими пе-

риодами. В этом параграфе мы доказываем теорему Бенке — Штейна, причем изучаем также более общие функции, с непостоянными автоморфными слагаемыми.

**28.1. Когомологии групп.** Пусть $G$ — мультипликативно записываемая группа и $A$ есть *$G$-модуль*, т. е. аддитивная абелева группа вместе с отображением

$$G \times A \longrightarrow A, \quad (\sigma, a) \mapsto \sigma a,$$

обладающим следующими свойствами:

(i) $\sigma(a+b) = \sigma a + \sigma b$,

(ii) $\sigma(\tau a) = (\sigma\tau) a$,

(iii) $\varepsilon a = a$

для всех $\sigma, \tau \in G$ и $a, b \in A$. Здесь $\varepsilon$ обозначает единичный элемент в $G$. Отображение

$$G \longrightarrow A, \quad \sigma \mapsto a_\sigma,$$

называется *граничным гомоморфизмом*, если

$$a_{\sigma\tau} = a_\sigma + \sigma a_\tau \quad \text{для всех} \quad \sigma, \tau \in G.$$

Если $G$ тривиально действует на $A$, т. е. $\sigma a = a$ для всех $\sigma \in G$, то граничный гомоморфизм — это не что иное, как обычный групповой гомоморфизм. Множество всех граничных гомоморфизмов $G \longrightarrow A$ образует естественным образом аддитивную группу, которая обозначается через $Z^1(G, A)$. Специальные граничные гомоморфизмы получаются следующим образом. Пусть $f \in A$ есть фиксированный элемент и

$$a_\sigma := f - \sigma f \quad \text{для всех} \quad \sigma \in G.$$

Тогда

$$a_{\sigma\tau} = f - \sigma\tau f = f - \sigma f + \sigma f - \sigma\tau f = (f - \sigma f) + \sigma(f - \tau f) = a_\sigma + \sigma a_\tau.$$

Возникающие таким образом граничные гомоморфизмы называются *кограницами*. Они образуют подгруппу в $Z^1(G, A)$, которая обозначается символом $B^1(G, A)$. Факторгруппа

$$H^1(G, A) := Z^1(G, A)/B^1(G, A)$$

называется *первой группой когомологий* для $G$ с коэффициентами в $G$-модуле $A$.

**28.2. Автоморфные слагаемые.** Пусть $p\colon Y \longrightarrow X$ — голоморфное, неразветвленное и безграничное накрывающее отображение римановых поверхностей и $G := \mathrm{Deck}(Y/X)$ — группа его накрывающих преобразований. Тогда $\mathcal{O}(Y)$ будет $G$-модулем, если для $\sigma \in G$ и $f \in \mathcal{O}(Y)$ функцию $\sigma f \in \mathcal{O}(Y)$ определить усло-

вием $\sigma f := f \circ \sigma^{-1}$. Разности

$$a_\sigma := f - \sigma f \in \mathcal{O}(Y), \quad \sigma \in G,$$

называются *автоморфными слагаемыми* функции $f$. Согласно (28.1), автоморфные слагаемые $f$ определяют граничный гомоморфизм

$$G \longrightarrow \mathcal{O}(Y), \quad \sigma \longmapsto a_\sigma.$$

Если $p$ — накрытие Галуа (определение 5.5) и все автоморфные слагаемые функции $f \in \mathcal{O}(Y)$ равны нулю, то функция $f$ принадлежит подкольцу $p^*\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}(Y)$ и поэтому ее можно отождествлять с некоторой функцией на $X$.

Аналогичное построение можно провести для мероморфных функций $\mathcal{M}(Y)$ и дифференцируемых функций $\mathcal{E}(Y)$.

**28.3. Накрытия Галуа.** Возьмем обозначения из (28.2) и предположим, что $p: Y \to X$ есть накрытие Галуа. Тогда каждая точка $x \in X$ имеет связную открытую окрестность $U$, такую, что

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda,$$

где $V_\lambda$ — непересекающиеся открытые подмножества в $Y$ и все отображения $p: V_\lambda \longrightarrow U$ — гомеоморфизмы. Теперь мы построим гомеоморфизм

$$\varphi: \ p^{-1}(U) \longrightarrow U \times G,$$

где $G$ наделена дискретной топологией. Сделаем это следующим образом. Выберем индекс $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует ровно один элемент $\sigma \in G$, такой, что $\sigma(V_{\lambda_0}) = V_\lambda$. Для $y \in V_\lambda$ положим $\varphi(y) := (p(y), \sigma)$. Тем самым $V_\lambda$ гомеоморфно отображается на $U \times \{\sigma\}$, откуда следует, что $\varphi$ — гомеоморфизм. Отображение $\varphi$ послойное, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times G \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} & \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Кроме того, $\varphi$ согласовано с действием $G$, т. е. из $\varphi(y) = (x, \sigma)$, следует, что $\varphi(\tau y) = (x, \tau\sigma)$ для всех $\tau \in G$. Послойный, согласованный с действием $G$ гомеоморфизм

$$\varphi: \ p^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

мы называем *G-картой* накрытия Галуа $p: Y \longrightarrow X$; $G$-карта разлагается на компоненты $\varphi = (p, \eta)$, где $\eta: p^{-1}(U) \longrightarrow G$ — отображение, такое, что

$$\eta(\tau y) = \tau\eta(y) \quad \text{для всех} \quad y \in p^{-1}(U) \quad \text{и} \quad \tau \in G.$$

**28.4. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — некомпактные римановы поверхности, $p\colon Y \to X$ — голоморфное, неразветвленное и безграничное накрытие Галуа и $G = \operatorname{Deck}(Y/X)$ — группа его накрывающих преобразований. Тогда для каждого граничного гомоморфизма*

$$G \to \mathcal{O}(Y), \quad \sigma \mapsto a_\sigma,$$

*существует голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(Y)$ с автоморфными слагаемыми $a_\sigma$.*

*Замечание.* Предложение 28.4 означает, что $H^1(G, \mathcal{O}(Y)) = 0$. Это предложение справедливо также для произвольных многообразий Штейна (Штейн [62], Серр [59]).

*Доказательство.* (a) Существует открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ поверхности $X$ и $G$-карты

$$\varphi_i = (p, \eta_i)\colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times G.$$

Теперь определим на $Y_i := p^{-1}(U_i)$ функции $f_i\colon Y_i \to \mathbb{C}$, полагая

$$f_i(y) := a_{\eta_i(y)}(y) \quad \text{для всех} \quad y \in Y_i.$$

Ясно, что $f_i$ голоморфна на $Y_i$.

(b) Теперь покажем, что $f_i - \sigma f_i = a_\sigma$ на $Y_i$ для всех $\sigma \in G$. Для $y \in Y_i$ имеем по определению

$$(\sigma f_i)(y) = f_i(\sigma^{-1} y) = a_{\eta_i(\sigma^{-1}y)}(\sigma^{-1}y) = a_{\sigma^{-1}\eta_i(y)}(\sigma^{-1}y).$$

Из соотношения $a_{\sigma\tau} = a_\sigma + \sigma a_\tau$ с $\tau := \sigma^{-1}\eta_i(y)$ следует, что $a_\sigma(y) = a_{\sigma\tau}(y) - a_\tau(\sigma^{-1}y) =$

$$= a_{\eta_i(y)}(y) - a_{\sigma^{-1}\eta_i(y)}(\sigma^{-1}y) = f_i(y) - (\sigma f_i)(y).$$

Таким образом, показано, что функции $f_i$ на $Y_i$ имеют требуемые автоморфные слагаемые.

(c) Согласно (b), разности $g_{ij} := f_i - f_j \in \mathcal{O}(Y_i \cap Y_j)$ инвариантны по отношению к накрывающим преобразованиям и, значит, их можно рассматривать как элементы $g_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Очевидно, $g_{ij} + g_{jk} = g_{ik}$ на тройных пересечениях, и поэтому семейство $(g_{ij})$ образует коцикл из $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$. Ввиду равенства $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, этот коцикл разрешим и, значит, существуют элементы $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$, такие, что

$$g_{ij} = g_i - g_j \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Мы рассматриваем $g_i$ как функции на $Y_i$, инвариантные относительно накрывающих преобразований. Тогда для функций

$$\tilde{f}_i := f_i - g_i \in \mathcal{O}(Y_i)$$

тоже $\tilde{f}_i - \sigma\tilde{f}_i = a_\sigma$ для всех $\sigma \in G$. На пересечениях $Y_i \cap Y_j$ имеем

$$\tilde{f}_i - \tilde{f}_j = f_i - f_j - (g_i - g_j) = g_{ij} - (g_i - g_j) = 0,$$

т. е. $\tilde{f}_i$ объединяются в одну глобальную функцию $f \in \mathcal{O}(Y)$ с $f - \sigma f = a_\sigma$ для всех $\sigma \in G$, ч. т. д.

**28.5. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — римановы поверхности, $p$: $Y \to X$ — голоморфное, неразветвленное и безграничное накрытие Галуа и $G = \mathrm{Deck}(Y/X)$ — группа его накрывающих преобразований. Тогда для каждого граничного гомоморфизма*

$$G \to \mathcal{E}(Y), \quad \sigma \mapsto a_\sigma,$$

*существует дифференцируемая функция $f \in \mathcal{E}(Y)$ с автоморфными слагаемыми $a_\sigma$.*

*Доказательство.* Это доказывается так же, как предложение 28.4, только пучок $\mathcal{O}$ заменяется пучком $\mathcal{E}$. Это можно сделать, так как $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ для всякой римановой поверхности, независимо от того, компактна она или нет (предложение 12.6).

**28.6. Предложение** (Бенке — Штейн). *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и*

$$\pi_1(X) \to \mathbb{C}, \quad \sigma \mapsto a_\sigma,$$

*— гомоморфизм групп. Тогда существует голоморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega(X)$, такая, что*

$$\int_\sigma \omega = a_\sigma \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \pi_1(X).$$

*Доказательство.* Для универсального накрытия $p$: $\tilde{X} \to X$ имеем $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$. По предложению 28.5, существует голоморфная функция $F \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ с постоянными автоморфными слагаемыми $a_\sigma$. Дифференциал $dF$, по предложению 10.13, можно рассматривать как дифференциальную форму на $X$, и эта форма имеет периоды $a_\sigma$.

**28.7. Предложение.** *Пусть $X$ — компактная риманова поверхность и*

$$\pi_1(X) \to \mathbb{C}, \quad \sigma \mapsto a_\sigma,$$

*— гомоморфизм групп. Тогда существует ровно одна гармоническая дифференциальная форма $\omega \in \mathrm{Harm}^1(X)$, такая, что*

$$\int_\sigma \omega = a_\sigma \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \pi_1(X).$$

*Доказательство.* Аналогично (28.6), из предложения 28.5 следует существование замкнутой дифференциальной формы $\tilde{\omega} \in \mathscr{E}^{(1)}(X)$ с

$$\int_\sigma \tilde{\omega} = a_\sigma \quad \text{для всех} \quad \sigma \in \pi_1(X).$$

По предложению 19.12, существуют гармоническая дифференциальная форма $\omega \in \mathrm{Harm}^1(X)$ и функция $f \in \mathscr{E}(X)$, такие, что

$$\tilde{\omega} = \omega + df.$$

Естественно, $\tilde{\omega}$ и $\omega$ имеют одинаковые периоды. Единственность следует из (19.8).

## § 29. Линейные и векторные расслоения

В некоторых задачах анализа на многообразиях возникает ситуация, когда каждой точке $x$ многообразия $X$ сопоставляется векторное пространство $E_x$. Эти векторные пространства $E_x$ зависят от $x$ в некотором смысле непрерывно (или даже голоморфно, когда $X$ — риманова поверхность). Тогда говорят о векторном расслоении на $X$. Это понятие мы сейчас уточним.

**29.1. Определение.** Пусть $E$ и $X$ — топологические пространства и $p$: $E \to X$ — непрерывное отображение. Пусть каждый слой $E_x := p^{-1}(x)$ наделен структурой $n$-мерного $\mathbb{C}$-векторного пространства. Тогда $p$: $E \to X$ или, короче, само $E$ называется *векторным расслоением* ранга $n$ над $X$, если у каждой точки $a \in X$ существует открытая окрестность $U$ и гомеоморфизм

$$h\colon\ E_U := p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n$$

со следующими свойствами:

(i) $h$ — послойное отображение, т. е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} E_U & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{C}^n \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_U} & \\ & U & \end{array}$$

(ii) Для каждой $x \in U$ отображение $h \mid E_x$ является изоморфизмом векторного пространства $E_x$ на $\{x\} \times \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$.

Отображение $h$ называется *линейной картой* расслоения $E$ над $U$.

Если $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$ и $h_i$: $E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n$ — линейные карты, то семейство $(h_i)$ называется *атласом* расслоения $E$.

**29.2. Определение.** Векторное расслоение $E$ ранга $n$ называется *тривиальным*, когда существует глобальная линейная карта $h$: $E \to X \times \mathbb{C}^n$.

Таким образом, векторное расслоение всегда локально тривиально; в локальные исследования понятие векторного расслоения не вносит ничего нового и играет определенную роль только при рассмотрении глобальных проблем.

**29.3. Определение.** *Линейным расслоением* (или расслоением на прямые) называется векторное расслоение ранга единица.

**29.4. Предложение.** *Пусть $E \to X$ — векторное расслоение ранга $n$ над топологическим пространством $X$ и $h_i$: $E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n$, $i \in I$, есть атлас для $E$. Тогда существуют однозначно определенные непрерывные отображения*

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C}),$$

*такие, что отображения*

$$\varphi_{ij} := h_i \circ h_j^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$$

*удовлетворяют условию*

$$\varphi_{ij}(x, t) = (x, g_{ij}(x)\, t) \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n.$$

*Кроме того, над $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполняется «коциклическое соотношение»*

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}.$$

*Определение.* Отображения $g_{ij}$ называются *функциями перехода*, а семейство $(g_{ij})$ называется коциклом, соответствующим атласу $(h_i)$.

*Доказательство.* Отображение

$$\varphi_{ij} = h_i \circ h_j^{-1}\colon (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$$

является послойным гомеоморфизмом, а в каждом слое — изоморфизмом векторных пространств. Поэтому для каждой $x \in U_i \cap U_j$ существует матрица $g_{ij}(x) \in GL(n, \mathbb{C})$, такая, что

$$\varphi_{ij}(x, t) = (x, g_{ij}(x)\, t).$$

Непрерывность соответствия $x \mapsto g_{ij}(x)$ следует из того, что $\varphi_{ij}$ — гомеоморфизмы. Соотношение $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ вытекает из соответствующего соотношения для отображений $\varphi_{ij}$.

**29.5. Определение.** Пусть $X$ — риманова поверхность, $E \to X$ — векторное расслоение ранга $n$ над $X$ и

$$\mathfrak{U} = \{h_i\colon E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n,\ i \in I\}$$

есть атлас для $E$. Атлас $\mathfrak{U}$ называется *голоморфным*, если голоморфны все соответствующие ему функции перехода

$$g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C}).$$

Два атласа $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ для $E$ называются голоморфно согласованными, если $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{U}'$ — тоже голоморфный атлас.

Легко проверить, что голоморфная согласованность является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности голоморфно согласованных атласов называется *голоморфной линейной структурой*.

*Голоморфное векторное расслоение* на римановой поверхности $X$ — это векторное расслоение $E \to X$ вместе с голоморфной линейной структурой. Голоморфное векторное расслоение $E \to X$ называется *голоморфно тривиальным*, если его голоморфная линейная структура содержит атлас, состоящий из одной-единственной карты $E \to X \times \mathbb{C}^n$.

**29.6. Коциклы.** Пусть $X$ — риманова поверхность. Для открытого подмножества $U \subset X$ пусть $GL(n, \mathcal{O}(U))$ есть группа всех обратимых $n \times n$-матриц с коэффициентами из $\mathcal{O}(U)$. Для $V \subset U$ имеется естественное отображение сужения $GL(n, \mathcal{O}(U)) \to GL(n, \mathcal{O}(V))$. Тем самым на $X$ определяется пучок $GL(n, \mathcal{O})$ групп (при $n \geqslant 2$ они не абелевы). Если $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$, то $Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ обозначает множество всех 1-коциклов со значениями в $GL(n, \mathcal{O})$ относительно $\mathfrak{U}$, т. е. все семейства $(g_{ij})_{i,\,j \in I}$, такие, что

$$g_{ij} \in GL(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$$

и

$$g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik} \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j \cap U_k$$

для всех $i, j, k \in I$. Заметим, что при $n \geqslant 2$ множество $Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ не образует группы относительно покомпонентного умножения.

Если $\mathfrak{U}$ — голоморфный атлас векторного расслоения над $X$, то семейство функций перехода для $\mathfrak{U}$ образует коцикл со значениями в $GL(n, \mathcal{O})$. Обратно, по такому коциклу всегда можно построить голоморфное векторное расслоение. Это утверждается в следующем предложении.

**29.7. Предложение.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$ и $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$. Тогда существует голоморфное векторное расслоение $p\colon E \to X$ ранга $n$ и голоморфный атлас*

$$\{h_i\colon E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n,\ i \in I\}$$

*для $E$, у которых функциями перехода будут наперед заданные $g_{ij}$.*

*Доказательство.* Пусть

$$E' := \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\} \subset X \times \mathbb{C}^n \times I.$$

Мы рассматриваем $E'$ с топологией, индуцированной из $X \times \mathbb{C}^n \times I$, где $I$ наделено дискретной топологией. Введем на $E'$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x,\ t,\ i) \sim (x',\ t',\ j) \Leftrightarrow x = x' \quad \text{и} \quad t = g_{ij}(x)\, t'.$$

При помощи коциклического соотношения $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ легко проверить, что это на самом деле есть отношение эквивалентности. Пусть $E := E'/\sim$ рассматривается с фактортопологией и $\varkappa$: $E' \longrightarrow E$ — каноническое факторотображение. Так как отношение эквивалентности согласовано с проекцией $E' \longrightarrow X$, то при этом индуцируется непрерывное отображение $p$: $E \longrightarrow X$. Слои $p^{-1}(x)$ естественным образом наделяются структурой $n$-мерного $\mathbb{C}$-векторного пространства. Имеем

$$E_{U_i} = p^{-1}(U_i) = \varkappa (U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\})$$

и $\varkappa$: $U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\} \longrightarrow E_{U_i}$ есть гомеоморфизм. Линейные карты $h_i$: $E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ определяются теперь как отображения, обратные к этим гомеоморфизмам, с отождествлением $U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\} \cong U_i \times \mathbb{C}^n$. Из этого построения следует, что функции перехода для атласа $(h_i)$ суть заданные $g_{ij}$.

**29.8. Определение.** Пусть $p$: $E \longrightarrow X$ есть векторное расслоение над топологическим пространством $X$ и $U$ — подмножество в $X$. *Сечением* $E$ над $U$ называют непрерывное отображение $f$: $U \longrightarrow E$, такое, что $p \circ f = \mathrm{id}_U$.

Условие $p \circ f = \mathrm{id}_U$ означает, что $f$ сопоставляет каждой точке $x \in U$ элемент $f(x) \in E_x$. Если $h_i$: $E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ — линейная карта на $E$, то сечению $f$ можно однозначно сопоставить непрерывную функцию $f_i$: $U_i \cap U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ так, что

$$h_i(f(x)) = (x,\ f_i(x)) \quad \text{для всех} \quad x \in U_i \cap U.$$

Функция $f_i$ называется представлением сечения $f$ относительно карты $h_i$.

**29.9. Определение.** Пусть $p$: $E \longrightarrow X$ — голоморфное векторное расслоение ранга $n$ над римановой поверхностью $X$ и $\{h_i$: $E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n,\ i \in I\}$ — атлас голоморфной линейной структуры на $E$. Сечение $f$: $U \longrightarrow E$ над открытым подмножеством $U \subset X$ называется *голоморфным*, если представление $f_i$

сечения $f$ относительно каждой карты $h_i$ является голоморфной функцией $f_i$: $U_i \cap U \longrightarrow \mathbb{C}^n$. (Естественно, $f_i$ понимается как столбец из $n$ голоморфных функций $U_i \cap U \longrightarrow \mathbb{C}$.)

Ясно, что это определение не зависит от выбора атласа. Множество всех голоморфных сечений расслоения $E$ над $U$ образует векторное пространство, которое мы обозначаем через $\mathcal{O}_E(U)$. Вместе с естественными отображениями сужения, таким образом получается пучок $\mathcal{O}_E$ голоморфных сечений $E$.

Пусть $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ есть коцикл, соответствующий атласу $\{h_i: E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n, i \in I\}$. Представления $f_i$: $U_i \cap U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ сечения $f \in \mathcal{O}_E(U)$ удовлетворяют соотношению

(*) $\qquad f_i(x) = g_{ij}(x) f_j(x)$ для всех $x \in U_i \cap U_j \cap U$.

Поэтому $\mathcal{O}_E(U)$ изоморфно векторному пространству всех семейств $(f_i)_{i \in I}$, $f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U)^n$, удовлетворяющих соотношению (*), а $\mathcal{O}_E(U_i)$ изоморфно $\mathcal{O}(U_i)^n$. Если $E$ голоморфно тривиально, то пучок $\mathcal{O}_E$ изоморфен пучку $\mathcal{O}^n$.

Теперь мы приведем два важных примера голоморфных линейных расслоений на римановых поверхностях.

**29.10. Голоморфное кокасательное расслоение.** Пусть $X$ — риманова поверхность и $(U_i, z_i)$, $i \in I$ — покрытие $X$ координатными окрестностями. В $U_i \cap U_j$ функция $g_{ij} := \frac{dz_j}{dz_i}$ голоморфна и не имеет нулей, а значит, семейство $(g_{ij})$ определяет коцикл из $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$ относительно покрытия $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$. Пусть $T^*(X)$ есть линейное расслоение, соответствующее этому коциклу $(g_{ij})$; тогда $T^*(X)$ называется *голоморфным кокасательным расслоением* на $X$. Пучок голоморфных сечений расслоения $T^*(X)$ изоморфен пучку $\Omega$ голоморфных дифференциальных форм на $X$. Этот изоморфизм можно описать следующим образом. Пусть $\omega \in \Omega(U)$. Тогда $\omega$ над $U_i \cap U$ можно представить в виде $\omega = f_i dz_i$ с $f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U)$. Над $U_i \cap U_j \cap U$ имеем $f_i = f_j \frac{dz_j}{dz_i} = g_{ij} f_j$, и, значит, определено семейство $(f_i)$ — голоморфное сечение $T^*(X)$ над $U$. Обратно, всякое семейство $(f_i)$ голоморфных функций $f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U)$ с $f_i = g_{ij} f_j$ на $U_i \cap U_j \cap U$ порождает дифференциальную форму $\omega \in \Omega(U)$, такую, что $\omega = f_i dz_i$ на $U_i \cap U$.

**29.11. Линейное расслоение дивизора.** Пусть $D$ — дивизор на римановой поверхности $X$. Мы сопоставим ему голоморфное линейное расслоение $E_D$ так, что пучок голоморфных сечений $E_D$ будет изоморфен пучку $\mathcal{O}_D$ мероморфных кратных для $-D$ (см. (16.4)). Имеется открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ поверхности $X$ и мероморфные функции $\psi_i \in \mathcal{M}(U_i)$, такие,

что $(\psi_i)=D$ на $U_i$. А тогда

$$g_{ij}:=\frac{\psi_i}{\psi_j}\in\mathcal{O}^*(U_i\cap U_j),$$

так как $\psi_i$ и $\psi_j$ на $U_i\cap U_j$ имеют одинаковые нули и полюсы. Семейство $g_{ij}$ образует коцикл $(g_{ij})\in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^*)$. Пусть $E_D$ есть голоморфное линейное расслоение, которое соответствует этому коциклу по предложению 29.7.

Пусть $U$ открыто в $X$ и $f\in\mathcal{O}_D(U)$, т. е. $(f)\geqslant -D$ на $U$. Тогда существуют голоморфные функции $f_i\in\mathcal{O}(U_i\cap U)$, такие, что $f=f_i/\psi_i$ на $U_i\cap U$. Поэтому на пересечениях $U_i\cap U_j\cap U$ имеем

$$\frac{f_i}{\psi_i}=\frac{f_j}{\psi_j}\quad \text{и, значит,}\quad f_i=g_{ij}f_j.$$

Таким образом, семейство $(f_i)$ определяет голоморфное сечение $E_D$ над $U$. Обратно, пусть голоморфное сечение $E_D$ над $U$ задается семейством $(f_i)$ голоморфных функций $f_i\in\mathcal{O}(U_i\cap U)$ с $f_i=g_{ij}f_j$. Тогда $f_i/\psi_i=f_j/\psi_j$ на $U_i\cap U_j\cap U$ и, значит, существует мероморфная функция $f\in\mathcal{M}(U)$, такая, что $f=f_i/\psi_i$ на $U_i\cap U$ для всех $i\in I$. Поэтому $f\in\mathcal{O}_D(U)$.

Мы докажем сейчас одно утверждение о когомологиях со значениями в пучке голоморфных сечений векторного расслоения, аналогичное утверждению из § 14 для пучка $\mathcal{O}$. Для разнообразия на этот раз мы применим другой метод доказательства.

**29.12. Лемма.** *Пусть $X$ — риманова поверхность, $E$ — голоморфное векторное расслоение над $X$ и $Y$ — относительно компактное открытое подмножество в $X$. Тогда для всякого открытого подмножества $Y_0\subset Y$ отображение сужения $H^1(Y, \mathcal{O}_E)\longrightarrow H^1(Y_0, \mathcal{O}_E)$ сюръективно.*

*Доказательство.* Существует конечное число открытых множеств $U_i\subset X$, $i=1, \ldots, r$, биголоморфно эквивалентных открытым множествам в $\mathbb{C}$, таких, что $Y=U_1\cup\ldots\cup U_r$ и существуют голоморфные линейные карты $h_i\colon E_{U_i}\longrightarrow U_i\times\mathbb{C}^n$. Тогда для всякого открытого подмножества $V\subset U_i$ имеем

$$H^1(V, \mathcal{O}_E)\cong H^1(V, \mathcal{O})^n=0,$$

см. предложение 26.1. Положим

$$Y_k:=Y_0\cup\bigcup_{i=1}^{k}U_i.$$

Очевидно, достаточно показать, что отображения

$$H^1(Y_k, \mathcal{O}_E)\longrightarrow H^1(Y_{k-1}, \mathcal{O}_E)$$

для $k=1, \ldots, r$ сюръективны. Пусть $k$ фиксировано и

$$V_i := U_i \cap Y_{k-1} \quad \text{для} \quad i=1, \ldots, r,$$
$$V'_i := V_i \quad \text{для} \quad i \neq k \text{ и } V'_k := U_k.$$

Тогда $\mathfrak{V}=(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ есть покрытие Лере для $Y_{k-1}$, $\mathfrak{V}' = (V'_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ — покрытие Лере для $Y_k$ и $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E) = Z^1(\mathfrak{V}', \mathcal{O}_E)$, так как $V_i \cap V_j = V'_i \cap V'_j$ для всех $i \neq j$. Поэтому отображение $H^1(\mathfrak{V}', \mathcal{O}_E) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ сюръективно, ч. т. д.

**29.13. Предложение.** *Пусть $Y$ — относительно компактное открытое подмножество римановой поверхности $X$ и $E$ — голоморфное векторное расслоение над $X$. Тогда пространство $H^1(Y, \mathcal{O}_E)$ конечномерно.*

*Доказательство.* Существуют открытое множество $Y'$ с $Y \Subset Y' \Subset X$ и открытые множества $V_i \Subset U_i$, $i=1, \ldots, r$, в $X$ со следующими свойствами:

(i) $\bigcup_{i=1}^{r} V_i = Y$, $\bigcup_{i=1}^{r} U_i = Y'$,

(ii) каждое $U_i$ биголоморфно эквивалентно открытому подмножеству в $\mathbb{C}$,

(iii) над каждым $U_i$ существует голоморфная линейная карта $h_i \colon E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n$.

Тогда $\mathfrak{U}=(U_i)$ и $\mathfrak{V}=(V_i)$ — покрытия Лере для $Y'$, соответственно для $Y$, относительно пучка $\mathcal{O}_E$. Поэтому, согласно лемме 29.12, отображение сужения $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) \to H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ сюръективно. Отсюда следует, что отображение

$$\varphi \colon C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E) \times Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E),$$
$$(\eta, \xi) \mapsto \delta(\eta) + \beta(\xi),$$

где $\beta \colon Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ есть отображение сужения, тоже сюръективно. Пространства $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E)$, $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ и $C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ следующим образом можно превратить в пространства Фреше. С топологией компактной сходимости $\mathcal{O}_E(U_i \cap U_j) \cong \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^n$ являются пространствами Фреше, а с ними вместе и пространство $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) = \prod_{i,j} \mathcal{O}_E(U_i \cap U_j)$, наделенное топологией произведения. Легко видеть, что $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E)$ есть замкнутое подпространство в $C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E)$ и, значит, это тоже пространство Фреше. Аналогично вводится топология в $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ и $C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$. Относительно этих топологий отображения $\delta \colon C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ и $\beta \colon Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ становятся непрерывными. Из теоремы Монтеля следует, что $\beta$ даже компактно. Поэтому отображение

$$\psi \colon C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E) \times Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E) \to Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E),$$
$$(\eta, \xi) \mapsto \beta(\eta),$$

тоже компактно. По теореме Л. Шварца (см. приложение В.11), отображение

$$\varphi-\psi\colon C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)\times Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_E)\longrightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E),$$
$$(\eta, \xi)\longmapsto\delta\eta,$$

как разность сюръективного и компактного непрерывных линейных отображений между пространствами Фреше, имеет образ конечной коразмерности. Но образ $\varphi-\psi$ есть векторное пространство $B^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ всех кограниц в $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$. Поэтому $H^1(Y, \mathcal{O}_E)\cong H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_E)$ конечномерно.

**29.14. Следствие.** *Пусть $E$ — голоморфное векторное расслоение над компактной римановой поверхностью $X$. Тогда пространство $H^1(X, \mathcal{O}_E)$ конечномерно.*

**29.15. Мероморфные сечения.** Пусть $E$ — голоморфное векторное расслоение ранга $n$ над римановой поверхностью $X$. Пусть $U\subset X$ — открытое множество, над которым существует голоморфная линейная карта $h\colon E_U\longrightarrow U\times\mathbb{C}^n$, и $a$ — точка в $U$. Сечение $f\in\mathcal{O}_E(U\setminus\{a\})$ представляется относительно этой карты $n$-столбцом голоморфных функций $(f_1, \ldots, f_n)\in\mathcal{O}(U\setminus\{a\})^n$. Точка $a$ называется *полюсом порядка $m$* для $f$, если все $f_j$ в $a$ имеют полюс порядка $\leqslant m$ или устранимую особенность и по крайней мере одна $f_j$ имеет в $a$ полюс порядка $m$. Это определение не зависит от выбора линейной карты в точке $a$.

Под *мероморфным сечением* $E$ над открытым подмножеством $Y\subset X$ понимается голоморфное сечение $f\in\mathcal{O}_E(Y')$ над открытым подмножеством $Y'\subset Y$, такое, что

(i) $Y\setminus Y'$ — дискретное подмножество в $Y$,

(ii) $f$ в каждой точке $a\in Y\setminus Y'$ имеет полюс.

Совершенно аналогично предложению 14.12 доказывается

**29.16. Предложение.** *Пусть $E$ — голоморфное векторное расслоение над римановой поверхностью $X$ и $Y$ — относительно компактное открытое подмножество в $X$. Тогда для каждой точки $a\in Y$ существует мероморфное сечение $E$ над $Y$, которое в $a$ имеет полюс, а в $Y\setminus\{a\}$ голоморфно.*

**29.17. Следствие.** *Всякое голоморфное векторное расслоение над компактной римановой поверхностью обладает глобальным мероморфным сечением, не равным нулю тождественно.*

**29.18. Линейные расслоения и дивизоры.** Пусть $E$ — голоморфное линейное расслоение над римановой поверхностью $X$ и $\psi$ — глобальное мероморфное сечение $E$, не равное нулю тождественно. Тогда определен дивизор $D$ сечения $\psi$: для $a\in X$ $D(a)$ есть порядок $\psi$ в $a$ относительно линейной карты

на $E$ в окрестности $a$. Этот порядок не зависит от карты. Далее, пучок $\mathcal{O}_E$ голоморфных сечений $E$ изоморфен пучку $\mathcal{O}_D$ мероморфных кратных для $-D$. А именно, если $f \in \mathcal{M}(U)$ и $(f) \geqslant -D$ на $U$, то $f\psi$ есть голоморфное сечение $E$ над $U$; обратно, для каждого сечения $\varphi \in \mathcal{O}_E(U)$ отношение $f = \varphi/\psi$ есть вполне определенная мероморфная функция из $\mathcal{M}(U)$ с $(f) \geqslant -D$ на $U$.

Эти соображения в определенном смысле представляют собой обращение утверждений из (29.11).

# § 30. Тривиальность векторных расслоений

В этом параграфе мы показываем, что на некомпактной римановой поверхности всякое голоморфное векторное расслоение тривиально. Это нам понадобится в следующем параграфе при обсуждении проблемы Римана — Гильберта.

**30.1. Предложение.** *Пусть $E$ — голоморфное векторное расслоение ранга $n$ над римановой поверхностью $X$. Пусть $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ — открытое покрытие $X$, $h_i$: $E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{C}^n$, $i \in I$, — голоморфный атлас для $E$ и $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ — соответствующий коцикл функций перехода. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$E$ голоморфно тривиально;*

(ii) *существует $n$ глобальных голоморфных сечений $F_1, \ldots, F_n$ расслоения $E$, таких, что в каждой точке $x \in X$ векторы $F_1(x), \ldots, F_n(x) \in E_x$ линейно независимы;*

(iii) *коцикл $(g_{ij})$ разрешим, т. е. существует коцепь $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$, такая, что*

$$g_{ij} = g_i g_j^{-1} \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j \quad \text{для всех} \quad i, j \in I.$$

*Доказательство.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Так как $E$ голоморфно тривиально, то голоморфная линейная структура на $E$ содержит карту $h$: $E \to X \times \mathbb{C}^n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонические единичные векторы в $\mathbb{C}^n$ и $F_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, — сечения $E$ с

$$h(F_\nu(x)) = (x, e_\nu) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Тогда все $F_\nu$ голоморфны и в каждом слое линейно независимы.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Всякое сечение $F_\nu$ относительно каждой карты $h_i$ можно представить как набор из $n$ голоморфных функций $f^i_{\mu\nu} \in \mathcal{O}(U_i)$, $\mu = 1, \ldots, n$. Пусть $g_i$ есть матрица $(f^i_{\mu\nu})_{1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n}$.

Так как $F_1, \ldots, F_n$ в каждом слое линейно независимы, то $g_i \in GL(n, \mathcal{O}(U_i))$. Кроме того, над $U_i \cap U_j$ имеем

$$g_i = g_{ij} g_j \quad \text{и, значит,} \quad g_{ij} = g_i g_j^{-1},$$

т. е. коцикл $(g_{ij})$ разрешим.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Из карт $h_i$: $E_{U_i} \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ мы построим линейную карту $h$: $E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n$, голоморфно согласованную со всеми $h_i$.

Пусть $v \in E_{U_i}$ и $h_i(v) = :(x, t)$. Тогда положим $h(v) := (x, g_i^{-1} t)$. Это определение не зависит от выбора карты, так как если $v \in E_{U_j}$ и $h_j(v) = :(x, t')$, то $t = g_{ij} t' = g_i g_j^{-1} t'$ и, значит, $g_i^{-1} t = g_j^{-1} t'$. Непосредственно из определения следует, что $\{h: E \longrightarrow X \times \mathbb{C}^n\}$ голоморфно согласована с атласом, состоящим из всех $h_i$.

**30.2. Лемма.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и $E$ — голоморфное векторное расслоение над $X$. Если $E$ имеет нетривиальное глобальное мероморфное сечение, то $E$ имеет также глобальное голоморфное сечение без нулей.*

*Доказательство.* Пусть $f$ — нетривиальное мероморфное сечение $E$ над $X$ и $A \subset X$ — дискретное множество его нулей и полюсов. Пусть $a \in A$ и $h$: $E_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ — голоморфная линейная карта для $E$ в открытой окрестности $U \ni a$. Относительно карты $h$ сечение $f$ представляется как $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{M}(U)^n$. Пусть $k(a)$ есть минимум порядков функций $f_\nu$ в точке $a$. По теореме Вейерштрасса (26.5), существует мероморфная функция $\varphi \in \mathcal{M}(X)$, которая в каждой точке $a \in A$ имеет порядок $-k(a)$, а в $X \setminus A$ голоморфна и нигде не равна нулю. Тогда $F := \varphi f$ есть всюду голоморфное сечение $E$ без нулей.

**30.3. Предложение.** *Всякое голоморфное линейное расслоение $E$ над некомпактной римановой поверхностью $X$ голоморфно тривиально.*

*Доказательство.* Пусть $\varnothing \neq Y_0 \Subset Y_1 \Subset Y_2 \Subset \ldots$ есть последовательность относительно компактных областей Рунге в $X$ с $\bigcup Y_\nu = X$. По предложению 29.16, над каждой $Y_\nu$ существует мероморфное сечение и, значит, по (30.2), существует голоморфное сечение, нигде не равное нулю. Поэтому, согласно предложению 30.1, $E$ над каждой $Y_\nu$ тривиально. Тогда из аппроксимационной теоремы Рунге следует, что всякое голоморфное сечение $E$ над $Y_\nu$ можно сколь угодно точно аппроксимировать голоморфными сечениями $E$ над $Y_{\nu+1}$. Пусть $f_0 \in \mathcal{O}_E(Y_0)$ — сечение, которое в точке $a \in Y_0$ не равно нулю. Можно построить последовательность $f_\nu \in \mathcal{O}_E(Y_\nu)$, $\nu \geqslant 1$, такую,

что $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu(a) \neq 0$ и для каждого $\nu \in \mathbb{N}$ последовательность $(f_\mu | Y_\nu)_{\mu > \nu}$ в $\mathcal{O}_E(Y_\nu)$ сходится. Тогда предел последовательности $(f_\nu)$ есть сечение $f \in \mathcal{O}_E(X)$, не равное нулю тождественно. Как и выше, из этого следует, что $E$ над $X$ тривиально.

**30.4. Предложение.** *Всякое голоморфное векторное расслоение $E$ над некомпактной римановой поверхностью $X$ голоморфно тривиально.*

*Доказательство.* Мы докажем это предложение индукцией по рангу $n$ расслоения $E$. Начало индукции, $n = 1$, — это предложение 30.3.

*Шаг индукции $n-1 \to n$.* Пусть предложение уже доказано для всех расслоений ранга $n-1$ и $E$ — расслоение ранга $n$.

(a) Предположим сначала, что существует сечение $F_n \in \mathcal{O}_E(X)$, нигде не равное нулю. Так как $E$ локально тривиально, то имеется открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ поверхности $X$ и для каждого $i \in I$ имеются сечения $F_1^i, \ldots, F_{n-1}^i \in \mathcal{O}_E(U_i)$, такие, что $F_1^i(x), \ldots, F_{n-1}^i(x), F_n(x)$ для всех $x \in U_i$ линейно независимы. Над пересечением $U_i \cap U_j$ эти системы можно выразить друг через друга:

$$\begin{pmatrix} F^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{ij} & a^{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^j \\ F_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $F_1^i, \ldots, F_{n-1}^i$ объединены в один вектор-столбец $F^i$, $G^{ij}$ — матрица из $GL(n-1, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ и $a^{ij}$ есть вектор-столбец длины $n-1$ с элементами из $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Над $U_i \cap U_j \cap U_k$ имеем $G^{ij}G^{jk} = G^{ik}$, поэтому по индуктивному предположению существуют матрицы $G^i \in GL(n-1, \mathcal{O}(U_i))$, такие, что

$$G^{ij} = G^i (G^j)^{-1} \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Положим $\tilde{F}^i = (G^i)^{-1} F^i$; тогда из (1) следует, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b^{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}^j \\ F_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

с некоторыми $b^{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^{n-1}$. Над $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполнено соотношение $b^{ij} + b^{jk} = b^{ik}$, поэтому, ввиду $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = 0$, можно найти голоморфные вектор-столбцы длины $n-1$, $b^i \in \mathcal{O}(U_i)^{n-1}$, такие, что

$$b^{ij} = b^i - b^j \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Положим $\hat{F}^i = \tilde{F}^i - b^i F_n$; тогда из (2) следует, что

$$\begin{pmatrix} \hat{F}^i \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}^j \\ F_n \end{pmatrix} \quad \text{на} \ U_i \cap U_j.$$

Поэтому $\hat{F}^i$ объединяются в один глобальный набор $(F_1, \ldots, F_{n-1}) \in \mathcal{O}_E(X)^{n-1}$. По построению, $F_1(x), \ldots, F_n(x)$ для каждой $x \in X$ линейно независимы. Поэтому $E$ голоморфно тривиально.

(b) Остается показать, что $E$ обладает голоморфным нигде не равным нулю сечением. По предложению 29.16 и лемме 30.2, это имеет место над каждой относительно компактной областью $Y \subset X$; таким образом, согласно (a), $E$ тривиально над $Y$. Теперь при помощи аппроксимационной теоремы Рунге, как в доказательстве (30.3), можно построить нетривиальное голоморфное сечение $E$ над $X$. А тогда, по лемме 30.2, $E$ имеет также нигде не равное нулю голоморфное сечение. Тем самым предложение 30.4 доказано.

**30.5. Следствие.** *На всякой некомпактной римановой поверхности $X$*

$$H^1(X, GL(n, \mathcal{O})) = 0;$$

*в частности*, $H^1(X, \mathcal{O}^*) = 0$.

Здесь равенство $H^1(X, GL(n, \mathcal{O})) = 0$ означает, что для всякого открытого покрытия $\mathfrak{U} = (U_i)$ поверхности $X$ любой коцикл $(g_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$ разрешим. Это равносильно тривиальности всех голоморфных векторных расслоений над $X$.

## § 31. Проблема Римана — Гильберта

Мы уже видели в § 11, что автоморфное поведение фундаментальной системы решений линейного дифференциального уравнения на римановой поверхности $X$ индуцирует гомоморфизм $T: \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{C})$, который каждому элементу $\sigma \in \pi_1(X)$ сопоставляет автоморфный множитель $T_\sigma$, на который умножается фундаментальная система при аналитическом продолжении вдоль $\sigma$. Обратно, можно спросить, существует ли для заданного гомоморфизма $T: \pi_1(X) \to GL(n, \mathbb{C})$ линейное дифференциальное уравнение на $X$, такое, что автоморфное поведение фундаментальной системы его решений задается именно этим гомоморфизмом $T$. Это называется проблемой Римана — Гильберта. В данном параграфе мы излагаем решение проблемы Римана—Гильберта на некомпактных римановых поверхностях, следуя Рёрлю [58].

**31.1. Автоморфные множители.** Пусть $p: Y \to X$ есть голоморфное, неразветвленное и безграничное накрывающее отображение римановых поверхностей и $G := \mathrm{Deck}(Y/X)$ — группа его накрывающих преобразований. Голоморфное отображение $\Phi: Y \to GL(n, \mathbb{C})$ называется мультипликативно

автоморфным с постоянными автоморфными множителями $T_\sigma \in GL(n, \mathbb{C})$, $\sigma \in G$, если

$$\sigma\Phi = \Phi T_\sigma \quad \text{для всех} \quad \sigma \in G.$$

В этом случае соответствие $\sigma \mapsto T_\sigma$, как легко проверить, является гомоморфизмом групп $G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, см. (11.6). Следующее предложение есть аналог предложения 28.4.

**31.2. Предложение.** *Пусть $X$, $Y$ — некомпактные римановы поверхности, $p$: $Y \longrightarrow X$ — голоморфное, неразветвленное и безграничное накрытие Галуа и $G := \mathrm{Deck}(Y/X)$ — группа его накрывающих преобразований. Тогда для каждого гомоморфизма*

$$T\colon\ G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad \sigma \mapsto T_\sigma,$$

*существует голоморфное отображение $\Phi$: $Y \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ с автоморфными множителями $T_\sigma$.*

*Доказательство.* (a) Существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ поверхности $X$ и $G$-карты

$$\varphi_i = (p, \eta_i)\colon\ p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G,$$

см. (28.3). Теперь мы определим на $Y_i := p^{-1}(U_i)$ функции $\Psi_i$: $Y_i \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$, полагая

$$\Psi_i(y) := T_{\eta_i(y)^{-1}} \quad \text{для всех} \quad y \in Y_i.$$

Так как $\Psi_i$ локально постоянны, то они, в частности, голоморфны.

(b) Пусть $y \in Y_i$ и $\sigma \in G$. Тогда

$$\sigma\Psi_i(y) = \Psi_i(\sigma^{-1}y) = T_{\eta_i(\sigma^{-1}y)^{-1}} = T_{\eta_i(y)^{-1}\sigma} = T_{\eta_i(y)^{-1}}T_\sigma = \\ = \Psi_i(y)\,T_\sigma.$$

Таким образом, функции $\Psi_i$ уже обладают над $U_i$ требуемым автоморфным поведением.

(c) Произведения $F_{ij} := \Psi_i\Psi_j^{-1} \in GL(n, \mathcal{O}(Y_i \cap Y_j))$, согласно (b), инвариантны по отношению к накрывающим преобразованиям и, значит, их можно рассматривать как элементы $F_{ij} \in GL(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$. Таким образом определен коцикл $(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O}))$. Так как, согласно (30.5), $H^1(X, GL(n, \mathcal{O})) = 0$, то этот коцикл разрешим и, значит, существуют элементы $F_i \in GL(n, \mathcal{O}(U_i))$, такие, что

$$F_{ij} = F_iF_j^{-1} \quad \text{над} \quad U_i \cap U_j.$$

Мы рассматриваем $F_i$ как элементы из $GL(n, \mathcal{O}(Y_i))$, инвариантные относительно накрывающих преобразований, и полагаем

$$\Phi_i := F_i^{-1}\Psi_i \in GL(n, \mathcal{O}(Y_i)).$$

Тогда $\sigma\Phi_i = F_i^{-1}\sigma\Psi_i = F_i^{-1}\Psi_i T_\sigma = \Phi_i T_\sigma$ для всех $\sigma \in G$. На пересечении $Y_i \cap Y_j$ получается

$$\Phi_i^{-1}\Phi_j = \Psi_i^{-1}F_i F_j^{-1}\Psi_j = \Psi_i^{-1}F_{ij}\Psi_j = \Psi_i^{-1}\Psi_i\Psi_j^{-1}\Psi_j = 1,$$

т. е. $\Phi_i = \Phi_j$. Таким образом, $\Phi_i$ объединяются в глобальную функцию $\Phi \in GL(n, \mathcal{O}(Y))$ с $\sigma\Phi = \Phi T_\sigma$ для всех $\sigma \in G$.

**31.3. Следствие.** *Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность и*

$$T\colon \pi_1(X) \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad \sigma \mapsto T_\sigma,$$

*есть гомоморфизм групп. Тогда существуют матрица $A \in M(n \times n, \Omega(X))$ и фундаментальная система решений дифференциального уравнения $dw = Aw$ на универсальном накрытии поверхности $X$ с автоморфными множителями $T_\sigma$.*

Согласно (11.6), для доказательства надо просто применить предложение 31.2 к универсальному накрытию $p\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ поверхности $X$.

**31.4.** Пусть $X$ — некомпактная риманова поверхность, $S \subset X$ — замкнутое дискретное подмножество и $X' := X \setminus S$. Тогда следствие 31.3 можно, в частности, применить к $X'$. Мы хотим еще усилить утверждение этого следствия тем, что получаемое дифференциальное уравнение во всех точках $a \in S$ должно иметь особенности не более чем фуксова типа. Чтобы определение из (11.12) можно было перенести на этот общий случай, мы сначала докажем следующую лемму.

**Лемма.** *В принятых выше обозначениях пусть $p\colon Y \longrightarrow X'$ есть универсальное накрытие над $X'$. Пусть, далее, $(U, z)$ есть координатная окрестность точки $a \in S$* со следующими *свойствами:*

(i) $z(U) \subset \mathbb{C}$ — *единичный круг и* $z(a) = 0$,

(ii) $U \cap S = \{a\}$.

*Пусть $Z$ — какая-нибудь связная компонента в $p^{-1}(U \setminus a)$. Тогда $p\colon Z \longrightarrow U \setminus a$ есть универсальное накрытие над $U \setminus a$.*

*Доказательство.* По теореме Вейерштрасса (26.5), существует голоморфная функция $f \in \mathcal{O}(X)$, которая в $a$ имеет нуль первого порядка, а в $X \setminus a$ нигде не равна нулю. Тогда $\omega := df/f$ — голоморфная дифференциальная форма в $X'$. Пусть $\gamma$ есть положительно ориентированная замкнутая кривая $|z| = 1/2$ в $U$. Тогда

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \frac{df}{f} = 2\pi i.$$

Отображение $p\colon Z \to U\setminus a$ во всяком случае неразветвленное и безграничное; таким образом, к нему применимо предложение 5.10. Если бы $p\colon Z \to U\setminus a$ не было универсальным накрытием, то оно было бы изоморфно накрытию

$$E^* \to E^*, \quad z \mapsto z^k,$$

с некоторым натуральным $k \geqslant 1$, где $E^*$—проколотый единичный круг. А тогда существовало бы $k$ поднятий $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ кривой $\gamma$, которые объединяются в замкнутую кривую $c = \gamma_1 \ldots \gamma_k$. Отсюда следовало бы, что

$$\int_c p^*\omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} p^*\omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma} \omega = 2k\pi i.$$

Но, с другой стороны, $\int_c p^*\omega = 0$, так как $p^*\omega$ на $Y$ обладает первообразной функцией. Противоречие!

Пусть теперь, в тех же обозначениях, $dw = Aw$, где $A \in M(n\times n,\ \Omega(X'))$, есть линейное дифференциальное уравнение на $X'$ и $\Phi \in GL(n,\ \mathcal{O}(Y))$—фундаментальная система решений. Дифференциальное уравнение называется уравнением *фуксова типа* в точке $a \in S$, когда для всякой связной компоненты $Z$ множества $p^{-1}(U\setminus a)$ функция $\Phi \mid Z$ удовлетворяет условиям (11.12).

**31.5. Предложение.** *Пусть $X$—некомпактная риманова поверхность, $S$—замкнутое дискретное подмножество в $X$ и $X' := X\setminus S$. Пусть, далее, задан гомоморфизм*

$$T\colon \pi_1(X') \to GL(n,\ \mathbb{C}), \quad \sigma \mapsto T_\sigma.$$

*Тогда существует дифференциальное уравнение $dw = Aw$, $A \in M(n\times n,\ \Omega(X'))$, которое в каждой точке $a \in S$ является уравнением фуксова типа, и фундаментальная система решений $\Phi \in GL(n,\ \mathcal{O}(Y))$ уравнения $dw = Aw$ на универсальном накрытии $p\colon Y \to X'$ поверхности $X'$ с автоморфными множителями $T_\sigma$.*

*Доказательство.* Пусть $S = \{a_i\colon i \in I\}$. Для каждого $i$ выберем координатную окрестность $(U_i,\ z_i)$ точки $a_i$, удовлетворяющую условиям (i) и (ii) леммы 31.4. Мы можем считать, что $0 \notin I$. Пусть $J := I \cup \{0\}$. Положим $U_0 := X'$. Тогда $\mathfrak{U} := (U_j)_{j\in J}$ есть открытое покрытие $X$. Для $i \neq j$ имеем $U_i \cap U_j \subset X'$. Еще определим $Y_0 := Y$ и $Y_i := p^{-1}(U_i\setminus a_i)$ для всех $i \in I$.

По предложению 31.2, существует функция $\Psi_0 \in GL(n,\ \mathcal{O}(Y_0))$ с $\sigma\Psi_0 = \Psi_0 T_\sigma$ для всех $\sigma \in \pi_1(X')$. Для всех $i \in I$, по пред-

ложению 11.10, существуют элементы $\Psi_i \in GL(n, \mathcal{O}(Y_i))$ фуксова типа, которые обладают тем же автоморфным поведением, что и $\Psi_0 | Y_i$. Поэтому для $i, j \in J, i \neq j$, матрица

$$F_{ij} := \Psi_i \Psi_j^{-1} \in GL(n, \mathcal{O}(Y_i \cap Y_j))$$

инвариантна относительно накрывающих преобразований и ее можно рассматривать как элемент $F_{ij} \in GL(n, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$. Еще мы полагаем $F_{jj} := 1 \in GL(n, \mathcal{O}(U_j))$ для всех $j \in J$ и таким образом получаем коцикл

$$(F_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, GL(n, \mathcal{O})).$$

Поскольку $H^1(X, GL(n, \mathcal{O})) = 0$, этот коцикл разрешим и, значит, существуют элементы $F_i \in GL(n, \mathcal{O}(U_i))$ с

$$F_{ij} = F_i F_j^{-1} \quad \text{на} \quad U_i \cap U_j.$$

Теперь для всех $j \in J$ мы определим

$$\Phi_j := F_j^{-1} \Psi_j \in GL(n, \mathcal{O}(Y_j)).$$

Как и в (31.2), получается, что $\Phi_j$ образуют единую глобальную функцию $\Phi \in GL(n, \mathcal{O}(Y))$ с $\sigma\Phi = \Phi T_\sigma$ для всех $\sigma \in \pi_1(X)$. Над $U_i \setminus a_i$ имеем $\Phi = F_i^{-1}\Psi_i$. Так как $\Psi_i$ — фуксова типа и $F_i^{-1}$ голоморфна во всей $U_i$, то $\Phi$ — тоже фуксова типа. Матрица $\Phi$ является фундаментальной системой решений дифференциального уравнения $dw = Aw$ с $A := d\Phi \cdot \Phi^{-1}$; эта $A$ инвариантна при накрывающих преобразованиях и, значит, ее можно понимать как элемент $A \in M(n \times n, \Omega(X'))$. Предложение доказано.

# Приложение

## А. Разбиения единицы

Разбиения единицы — важный прием анализа на дифференцируемых многообразиях. Мы собрали здесь факты, на которые опирались в основном тексте книги. Доказательства читатель найдет, например, в [40], [43], [44].

**А.1.** *Носителем* $\operatorname{Supp}(f)$ вещественно- или комплекснозначной функции $f$ на топологическом пространстве $X$ называется замыкание множества $\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}$.

Стандартный пример $C^\infty$-функции (т. е. бесконечно дифференцируемой функции) $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, носитель которой есть замкнутый шар радиуса $\varepsilon > 0$, задается условием

$$g(x) := \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon - \|x\|^2}\right) & \text{при} \quad \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \|x\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\|x\| = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Эти функции могут служить основой для построения всех дальнейших необходимых $C^\infty$-функций.

**А.2.** Под $n$-мерным многообразием понимается хаусдорфово пространство $X$, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $\varphi\colon U \to V$ открытого множества $U \subset X$ на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ называется картой на $X$. Две карты $\varphi_i\colon U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, называются гладко согласованными, когда отображение

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

и его обратное бесконечно дифференцируемы. *Дифференцируемые многообразия* определяются теперь вполне аналогично римановым поверхностям (см. § 1), только биголоморфная согласованность всюду заменяется гладкой согласованностью. Римановы поверхности — это специальные 2-мерные дифференцируемые многообразия.

На дифференцируемом многообразии имеет смысл понятие дифференцируемой функции: требуется, чтобы эта функция была бесконечно дифференцируемой относительно любой карты.

**A.3. Определение.** Пусть $X$ — дифференцируемое многообразие и $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ — открытое покрытие $X$. Дифференцируемым (или гладким) *разбиением единицы*, подчиненным покрытию $\mathfrak{U}$, называется семейство $(g_i)_{i\in I}$ дифференцируемых функций $g_i$: $X\to\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(i) $0\leqslant g_i\leqslant 1$ для всех $i\in I$,

(ii) $\operatorname{Supp}(g_i)\subset U_i$ для всех $i\in I$,

(iii) семейство носителей $\operatorname{Supp}(g_i)$, $i\in I$, локально конечно, т. е. каждая точка $a\in X$ имеет окрестность $V$, такую, что $V\cap\operatorname{Supp}(g_i)\neq\varnothing$ лишь для конечного числа индексов $i\in I$,

(iv) $\sum\limits_{i\in I} g_i=1$.

(Ввиду (iii), сумма в (iv) имеет смысл.)

**A.4. Предложение.** *Пусть $X$ — дифференцируемое многообразие со счетной топологией. Тогда для всякого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ многообразия $X$ существует подчиненное ему дифференцируемое разбиение единицы.*

**A.5. Следствие.** *Пусть $X$ — дифференцируемое многообразие, $K$ — компактное подмножество в $X$ и $U$ — открытая окрестность $K$. Тогда существует дифференцируемая функция $f$: $X\to\mathbb{R}$ с $\operatorname{Supp}(f)\Subset U$, такая, что $f\,|\,K=1$.*

*Доказательство.* Мы можем считать, что $X$ имеет счетную топологию (в противном случае $X$ надо заменить относительно компактной открытой окрестностью $K$). Пусть $U_1$ — принадлежащая $U$ относительно компактная открытая окрестность $K$ и $U_2:=X\setminus K$. Тогда существует подчиненное покрытию $\mathfrak{U}=(U_1, U_2)$ дифференцируемое разбиение единицы $(g_1, g_2)$. Функция $f:=g_1$ обладает нужными свойствами.

## B. Топологические векторные пространства

Мы приводим здесь используемые в книге понятия и факты из функционального анализа. Подробности и доказательства можно найти, например, в [41], [46].

**B.1.** Векторным пространством мы здесь всегда называем векторное пространство над полем комплексных чисел. *Топологическое векторное пространство* — это векторное пространство $E$ вместе с топологией на нем, такой, что сложение

$$E\times E\to E,\quad (x, y)\mapsto x+y,$$

и умножение на скаляры

$$\mathbb{C}\times E\longrightarrow E,\quad (\lambda,\ x)\mapsto\lambda x,$$

являются непрерывными отображениями. В частности, тогда для каждого $a\in E$ перенос $E\longrightarrow E$, $x\mapsto a+x$, является гомеоморфизмом. Поэтому чтобы была известна топология в $E$, достаточно знать только базис окрестностей нуля. Если $\mathfrak{B}$ — базис окрестностей нуля, то сдвинутые множества $a+U$, $U\in\mathfrak{B}$, образуют базис окрестностей точки $a$.

**B.2. Полунормы.** *Полунормой* на векторном пространстве $E$ называется отображение $p$: $E\longrightarrow\mathbb{R}$ со следующими свойствами:

(i) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ для всех $x,\ y\in E$,

(ii) $p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$ для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, $x\in E$.

Из (i) и (ii) следует, что $p(x)\geqslant 0$ для всех $x\in E$. Если, сверх того, $p(x)=0$ только для $x=0$, то $p$ называется *нормой*.

Семейство $p_i$, $i\in I$, полунорм на векторном пространстве $E$ определяет топологию на $E$ следующим образом: базис окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$U(p_{i_1},\ \ldots,\ p_{i_m};\ \varepsilon):=\{x\in E:\ \max(p_{i_1}(x),\ \ldots,\ p_{i_m}(x))<\varepsilon\},$$

$i_1,\ \ldots,\ i_m\in I$, $\varepsilon>0$. Эта топология хаусдорфова тогда и только тогда, когда из $p_i(x)=0$ для всех $i\in I$ следует $x=0$.

Топологическое векторное пространство называется *локально выпуклым*, когда его топологию можно определить в указанном выше смысле некоторым семейством полунорм.

**B.3. Пространства Фреше.** Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов топологического векторного пространства называется *последовательностью Коши*, когда для всякой окрестности нуля $U$ существует $n_0\in\mathbb{N}$, такое, что

$$x_n-x_m\in U\quad \text{для всех}\quad n,\ m\geqslant n_0.$$

Топологическое векторное пространство $E$ называется *пространством Фреше*, когда выполняются следующие условия:

(i) топология в $E$ хаусдорфова и может быть определена при помощи счетного семейства полунорм;

(ii) $E$ полное, т. е. всякая последовательность Коши в $E$ сходится.

Пространство Фреше $E$ метризуемо. Пусть $p_n$, $n\in\mathbb{N}$, — определяющее топологию семейство полунорм. Если для $x$, $y\in E$ положить

$$d(x,\ y):=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)},$$

то $d$: $E \times E \to \mathbb{R}$ будет метрикой на $E$, которая определяет ту же топологию, что и полунормы $p_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Замкнутое векторное подпространство $F \subset E$ пространства Фреше само является пространством Фреше. Если $E_i$, $i \in I$, — счетное семейство пространств Фреше, то $\prod_{i \in I} E_i$ с топологией произведения — тоже пространство Фреше.

**B.4.** Типичный пример пространства Фреше — это векторное пространство $\mathcal{O}(X)$ голоморфных функций на открытом множестве $X \subset \mathbb{C}$ с топологией компактной сходимости, которая определяется полунормами

$$p_K(f) := \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

где $K$ пробегает компактные подмножества в $X$. Если $K_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность компактных подмножеств $X$ с $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{K}_n = X$, то счетное семейство полунорм $p_{K_n}$ определяет ту же топологию.

**B.5. Банаховы пространства и гильбертовы пространства.** Полное нормированное векторное пространство называется банаховым пространством. Таким образом, банахово пространство — это специальное пространство Фреше; его топология определяется единственной нормой, которая тогда чаще всего обозначается символом $\| \ \|$.

Гильбертово пространство $E$ — это специальное банахово пространство, норма которого определяется скалярным произведением

$$\langle \ , \ \rangle : E \times E \to \mathbb{C}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Если $A$ есть векторное подпространство гильбертова пространства $E$, то его ортогональное дополнение

$$A^{\perp} := \{y \in E : \langle y, x \rangle = 0 \text{ для всех } x \in A\}$$

является замкнутым векторным подпространством в $E$. Если само $A$ тоже замкнуто, то $E = A \oplus A^{\perp}$.

**B.6. Теорема Банаха.** *Пусть $E$, $F$ — пространства Фреше и $f$: $E \to F$ — непрерывное линейное и сюръективное отображение. Тогда $f$ открыто.*

**B.7. Следствие.** *Пусть $E$, $F$ — банаховы пространства и $f$: $E \to F$ — непрерывное линейное сюръективное отображение. Тогда найдется константа $C > 0$ со следующим свойством: для всякого $y \in F$ существует элемент $x \in E$, такой, что*

$$f(x) = y \quad \text{и} \quad \|x\| \leqslant C \|y\|.$$

*Доказательство.* Пусть $U := \{x \in E: \|x\| < 1\}$. Так как $f$ по теореме Банаха открыто, то существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$f(U) \supset V := \{y \in F: \|y\| < \varepsilon\}.$$

Положим $C := 2/\varepsilon$. Пусть задано $y \in F$. Если $y = 0$, мы возьмем $x = 0$. В противном случае $\lambda := \|y\| > 0$. Элемент $y_1 := \frac{1}{\lambda C} y$ лежит в $V$, и поэтому существует $x_1 \in U$ с $f(x_1) = y_1$. Для $x := \lambda C x_1$ тогда имеем $f(x) = y$ и

$$\|x\| = \lambda C \|x_1\| \leqslant \lambda C = C\|y\|, \quad \text{ч. т. д.}$$

**B.8. Теорема Хана — Банаха.** *Пусть $E$ — локально выпуклое векторное пространство, $E_0 \subset E$ — векторное подпространство и $\varphi_0$: $E_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ — непрерывный линейный функционал. Тогда существует непрерывный линейный функционал $\varphi$: $E \longrightarrow \mathbb{C}$, такой, что $\varphi \mid E_0 = \varphi_0$.*

**B.9. Следствие.** *Пусть $E$ — локально выпуклое векторное пространство и $A \subset B \subset E$ — векторные подпространства. Предположим, что для всякого непрерывного линейного функционала $\varphi$: $E \to \mathbb{C}$, такого, что $\varphi \mid A = 0$, имеем также $\varphi \mid B = 0$. Тогда $A$ всюду плотно в $B$.*

*Доказательство.* Если бы $A$ не было всюду плотным в $B$, то существовал бы элемент $b_0 \in B$, такой, что $b_0 \notin \overline{A}$. Пусть $E_0 := \overline{A} \oplus \mathbb{C} b_0$. Определим линейный функционал $\varphi_0$: $E_0 \longrightarrow \mathbb{C}$, полагая $\varphi_0(a + \lambda b_0) := \lambda$ для $a \in \overline{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что $\varphi_0$ непрерывен. По теореме Хана — Банаха, $\varphi_0$ можно продолжить до непрерывного линейного функционала $\varphi$: $E \longrightarrow \mathbb{C}$. Для этого функционала имеем $\varphi \mid A = 0$, но $\varphi \mid B \not\equiv 0$. Противоречие!

**B.10. Компактные отображения.** Линейное отображение $\psi$: $E \longrightarrow F$ между двумя топологическими векторными пространствами $E$, $F$ называется *компактным* или *вполне непрерывным*, когда существует окрестность нуля $U$ в $E$, такая, что $\psi(U)$ относительно компактно принадлежит $F$. Компактное линейное отображение, в частности, непрерывно.

*Пример.* Пусть $X$ — открытое подмножество в $\mathbb{C}$ и $Y \Subset X$ — относительно компактное открытое подмножество в $X$. Тогда отображение сужения

$$\beta: \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y), \quad f \mapsto f \mid Y,$$

компактно. Это доказывается так. Поскольку $\overline{Y}$ компактно принадлежит $X$, то

$$U := \{f \in \mathcal{O}(X): \sup_{x \in \overline{Y}} |f(x)| < 1\}$$

есть окрестность нуля в $\mathcal{O}(X)$. По теореме Монтеля, множество

$$M := \{g \in \mathcal{O}(Y)\colon \sup_{y \in Y} |g(y)| \leqslant 1\}$$

компактно в $\mathcal{O}(Y)$. Так как $\beta(U) \subset M$, то отсюда и следует утверждение.

**В.11. Теорема Л. Шварца.** *Пусть $E$, $F$ — пространства Фреше и $\varphi$, $\psi$: $E \to F$ — непрерывные линейные отображения. Пусть отображение $\varphi$ сюръективно, а $\psi$ компактно. Тогда образ отображения $\varphi - \psi$: $E \to F$ имеет конечную коразмерность в $F$.*

Доказательство см. в [60].

# Литература

(a) Теория функций одного переменного


1. Ahlfors L. V.: Complex Analysis New York: McGraw-Hill 1966.
2. Behnke H., Sommer F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 3. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1965.
3. Cartan H.: Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen. Mannheim: Bibliographisches Institut 1966. [Имеется перевод: Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных.—М.: ИЛ, 1963.]
4. Diederich K., Remmert R.: Funktionentheorie I. Heidelberger Taschenbücher, Bd. 103. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1972.
5. Hurwitz A., Courant R.: Funktionentheorie. Mit einem Anhang von H. Röhrl. 4. Aufl. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1964. [Имеется перевод: Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.—М.: Наука, 1968.]


Книги Бенке—Зоммера и Гурвица—Куранта содержат также много материала по римановым поверхностям.

(b) Римановы поверхности


10. Ahlfors L. V., Sario L.: Riemann surfaces. Princeton: University Press 1960.
11. Chevalley C.: Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. Amer. Math. Soc. 1951.
12. Guenot J., Narasimhan R.: Introduction à la théorie des surfaces de Riemann. Monographies de l'Enseignement Mathématique No. 23, Genève 1976.
13. Gunning R. C.: Lectures on Riemann surfaces. Princeton Math. Notes 2 (1966).
14. Gunning R. C.: Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton Math. Notes **6** (1967).
15. Gunning R. C.: Lectures on Riemann surfaces: Jacobi varieties. Princeton Math. Notes **12** (1972).
16. Holmann H.: Riemannsche Flächen I. II. Vorlesungsausarbeitung. Schriftenreihe des Math. Inst. d. Univ. Freiburg i. Ue. (Schweiz) 1973/74.
17. Nevanlinna R.: Uniformisierung. Berlin—Heidelberg—New York: Springer 1953. [Имеется перевод: Неванлинна Р. Униформизация.—М.: ИЛ, 1955.]
18. Pfluger A.: Theorie der Riemannschen Flächen. Springer 1957.

19. Serre J. P.: Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann 1959. [Имеется перевод: Серр Ж. Алгебраические группы и поля классов.— М.: Мир, 1968.]
20. Springer G.: Introduction to Riemann surfaces. Addison-Wesley 1957. [Имеется перевод: Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.]
21. Weyl H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. 3. Aufl. Stuttgart: Teubner 1955.

Книга Германа Вейля, первое издание которой появилось в 1913 г., была первым современным изложением теории римановых поверхностей. Она и сейчас еще хорошо читается. В ней содержится также очень много ссылок на старую литературу. В книгах Шевалле и Серра теория римановых поверхностей обсуждается с алгебраической точки зрения.

(c) Теория функций многих переменных, комплексные многообразия

30. Andreian Cazacu C.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin: Dtsch. Verl. Wiss. 1975.
31. Gunning R. C., Rossi H.: Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall 1965. [Имеется перевод: Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных.— М.: Мир, 1969.]
32. Hirzebruch F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. 2. Aufl. Berlin — Göttingen — Heidelberg — New York: 1963. 3. Aufl. in engl. Übersetzung: 1966. [Имеется перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии.— М.: Мир, 1973.]
33. Hörmander L.: An introduction to complex analysis in several variables. 2. Aufl. Amsterdam: North-Holland 1973. [Имеется перевод: Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.— М.: Мир, 1968.]
34. Wells R. O.: Differential analysis on complex manifolds. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall 1973. [Имеется перевод: Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1976.]
35. Grauert H., Remmert R.: Stein-Theorie. Berlin — Heidelberg — New York: Springer: In Vorbereitung.

(d) Топология, дифференцируемые многообразия, функциональный анализ

40. Bröcker T., Jänich K.: Einführung in die Differentialtopologie, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 143. Berlin — Heidelberg — New York: Springer 1973.
41. Floret K., Wloka J.: Einführung in die Theorie der lokal-konvexen Räume. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 56. Berlin-Heidelberg — New York: Springer 1968.
42. Godement R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958. [Имеется перевод: Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.]
43. Narasimhan R.: Analysis on real and complex manifolds. Amsterdam: North — Holland 1968. [Имеется перевод: Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях.— М.: Мир, 1971.]
44. Schubert H.: Topologie. Stuttgart: Teubner 1964.

45. Seifert H., Threlfall W.: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner 1934. Nachdruck Chelsea 1947. [Имеется перевод: Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.— Л.: ОНТИ НКТП, 1938.]
46. Treves F.: Topological vector spaces, distributions and kernels. New York — London: Academic Press 1967.

(e) Специальная литература

50. Ahlfors L. V.: The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces. In: Analytic Functions, pp. 45—66. Princeton: University Press 1960.
51. Behnke H., Stein K.: Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948).
52. Bieberbach L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt. 2. Aufl. Berlin — Heidelberg — New York: Springer 1965.
53. Cartan H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, pp. 41—55. CBRM: Bruxelles 1953. [Имеется перевод в сб. Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1958, 352—362.]
54. Florack Herta: Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **1** (1948).
55. Horn J., Wittich H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin: de Gruyter 1960.
56. Malgrange B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles à convolution. Annales de l'Inst. Fourier **6**, 271—355 (1955/56).
57. Meis T.: Die minimale Blätterzahl der Konkretisierungen einer kompakten Riemannschen Fläche. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, **16** (1960).
58. Röhrl H.: Das Riemann — Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Ann. **133**, 1—25 (1957).
59. Serre J. P.: Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux. Séminaire H. Cartan, E. N. S. Paris 1951/52, Exposé 20. Nachdruck Benjamin 1967.
60. Serre J. P.: Deux théorèmes sur les applications complètement continues. Séminaire H. Cartan, E. N. S. Paris 1953/54, Exposé 16. Nachdruck Benjamin 1967.
61. Serre J. P.: Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, pp. 57—68. CBRM: Bruxelles 1953. [Имеется перевод в сб. Расслоенные пространства.— М.: ИЛ, 1958, 363—371.]
62. Stein K.: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. **123**, 201—222 (1951).
63. Thimm W.: Der Weierstraßsche Satz der algebraischen Abhängigkeit von Abelschen Funktionen und seine Verallgemeinerungen. In: Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstraß 1815—1965 (Hrsg. H. Behnke, K. Kopfermann). Köln und Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

## Общие обозначения



## Пучки и функциональные пространства

## Обозначения теории когомологий



## Другие обозначения

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# Оглавление

95 коп.

